

高等院校电子信息科学与工程类

小波分析与应用

主编 王慧琴

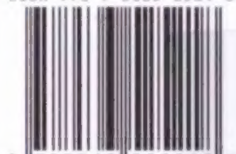
XIAOBO FENXI YU YINGYONG



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

策 划 人: 王丹丹
责任编辑: 王丹丹
封面设计: 七星工作室





ISBN 978-7-5635-2521-8

定价：24.00元



本书电子教案下载请登录
http://www.buptpress.com

高等院校电子信息科学与工程类

小波分析与应用

主编　王慧琴

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书系统地介绍了小波分析的基本思想、原理、方法和应用情况。主要内容分为3部分。第1部分：小波分析理论，包括第1～5章的内容，主要涉及小波理论基础、连续小波变换、离散小波变换、多分辨率分析与正交小波变换、小波变换和多采样滤波器组、二维小波变换，以及小波包的基本原理等。该部分力求简化数学推导过程，略去一些复杂的数学证明，使工科学生容易读懂并能很快应用。第2部分：基于MATLAB的小波分析，主要是第6章的内容。重点介绍了MATLAB小波分析工具箱的使用方法，包括图形用户接口、小波通用函数、一维小波分析的MATLAB实现、二维小波分析的MATLAB实现、小波包变换的MATLAB实现等，利用大量的实例说明一些函数的使用方法。第3部分：小波分析应用技术，主要是第7章的内容，分别详细地论述了小波分析在信号/图像处理、奇异性检测、信号去噪及数据压缩、数字水印技术等领域的应用与求解方法。实例丰富，所述算法具有实际可操作性，从而使本书具有理论的系统性和应用的实践性紧密结合和高度统一的特点。

书中附有若干MATLAB程序，供读者参考，意在鼓励读者将理论学习与上机实验结合以提高学习效率。

该书内容丰富、取材精练、重点突出、叙述清楚。内容安排由浅入深，既有理论，又有应用背景。既可供电子信息类和计算机应用类专业研究生以及高年级本科生作为教材使用，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

小波分析与应用/王慧琴主编. --北京：北京邮电大学出版社，2011.1
ISBN 978-7-5635-2521-8

Ⅰ.①小… Ⅱ.①王… Ⅲ.①小波分析 Ⅳ.①O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第264937号

书　　名：小波分析与应用
作　　者：王慧琴
责任编辑：王丹丹
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路10号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京源海印刷有限责任公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：11.75
字　　数：291千字
印　　数：1—3 000册
版　　次：2011年1月第1版　2011年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-2521-8　　定　价：24.00元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

前　言

20世纪80年代，法国地质学家J. Morlet在研究地下岩石油层分布时，对傅里叶变换和窗口傅里叶变换作了深入的研究，在此基础上提出了"小波(Wavelet)"的概念，随后数学家Meyer，Mallat，Daubechies，K. Chui等人的工作为小波分析学科的诞生和发展奠定了基础。

小波分析是从傅里叶变换中发展而来，但是在刻画时频局部化上又比傅里叶变换有优势。小波分析具有多分辨率分析的特点，在时域和频域都有表征信号局部信息的能力，因而能有效地从信号中提取有用的信息，所以被誉为"数学显微镜"。尽管小波分析的历史很短，但发展十分迅速，小波分析的理论和方法越来越引起人们的广泛关注，并取得了令人瞩目的进展，在信号分析、图像处理、模式识别、语音分析、方程求解、分形力学等领域都已取得了具有科学意义和应用价值的重要成果。

本书是作者根据近年来为通信、自动化、电子和计算机等专业的学生讲授小波分析课程的讲义整理而成的。主要特点：(1)理论方法易懂。小波分析具有很强的数学背景，众多数学推导往往令人望而却步，本书避开了枯燥的数学推导，注重物理概念的清晰，着重从信号处理的观点阐述小波分析的理论，尽可能用形象的语言和直观的背景来描述一些抽象的问题。书中结合了大量的图表和例子介绍小波技术的概念、原理和方法，在保持小波理论数学严谨性的同时，着力从工程技术角度阐述小波技术及其应用，以帮助读者尽快掌握小波分析的相关知识和技能，并能使用其解决实际问题；(2)涵盖了MATLAB小波分析。介绍了MATLAB小波工具箱和小波变换的MATLAB实现，帮助读者能够快速地建立小波分析的知识框架；(3)注重理论与实践相结合。作为应用，本书较详细地讨论了小波分析在信号去噪、奇异性检测、数据压缩、数字水印技术等领域的典型应用，突出了小波分析的基础性和实用性。

全书共7章。具体安排如下：

第1章—预备知识。介绍与小波分析理论相关的数学基础知识，主要内容包括函数空间、基底和框架的基本概念和性质；傅里叶级数、连续与离散傅里叶变换以及窗口傅里叶变换的理论与算法等。

第2章—连续小波变换。介绍小波变换的基本概念和连续小波变换的原理；常见的小波基函数以及小波基函数的选择等。

第3章—离散小波变换。介绍了离散小波和二进小波变换的理论和性质。

第4章—多分辨率分析与正交小波的构造。分别从理想滤波器组和函数空间的剖分引入多分辨率分析的概念，介绍了多分辨率分析的基本理论和基本算法；在此基础上讨论了小波函数的构造以及Mallat快速算法；最后讨论了二维多分辨率分析方法。多分辨率分析是小波分析的主要内容，因而本

章也是全书的重点。

第 5 章—小波包和多小波。小波包是正交小波基的一种推广，是提高频域分辨率的一种有效的方法；多小波是小波理论的新发展，有良好的对称性、短支撑性、正交性和高阶消失矩等性质。

第 6 章—基于 MATLAB 的小波分析。介绍了小波分析的 MATLAB 通用函数；小波、小波包的 MATLAB 实现以及 MATLAB 小波图形用户接口功能。

第 7 章—小波分析应用技术。介绍小波分析理论在信号去噪、压缩、奇异性检测和数字水印领域的应用情况。

本书在编写过程中，参考了国内外许多专家的论文、专著，引用了其中的一些研究成果和数据，在此一并表示感谢。北京邮电大学出版社为教材的出版做了大量的工作，研究生胡燕、陈卿、方维、杨娜娟、苏婧、齐海平、邹婷、赵敏、张国飞、雷洁、贾洁、廖勇、茅世豪等同学参与了书中部分程序的调试，插图的绘制以及录入和校对等工作，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请大家批评指正。

作 者

目　录

第1章 预备知识

小波分析是在现代调和分析的基础上发展起来的，其基础知识涉及泛函分析、数值分析、统计分析、傅里叶分析、信号与系统、数字信号处理等诸多方面，其同时具有理论深刻和工程应用十分广泛的双重意义。在本书的开始部分，将首先介绍小波分析的数学基础和傅里叶分析的概念和性质等。

1.1 函数空间

泛函分析是20世纪初发展起来的一个重要的数学分支，它是以集合论为基础的现代分析的一个基本组成部分。在泛函分析中，一个很重要的概念是函数空间。所谓函数空间，即由函数构成的集合。在此，我们首先介绍集合中最简单、最常用的函数空间的定义及其主要性质，然后介绍空间的基和算子的概念。

1.1.1 线性空间

定义 1.1.1 距离空间

设 X 是任一集合，如果 X 中任意两个元素 x 与 y 都对应一个实数 $\rho(x,y)$，而且满足：

① 非负性：$\rho(x,y)\geqslant 0$，当且仅当 $x=y$ 时，$\rho(x,y)=0$；

② 对称性：$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

③ 三角不等式：对于任意的 $x,y,z\in X$，有 $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$。

则称 $\rho(x,y)$ 为 x 与 y 之间的距离，而称 X 为以 $\rho(x,y)$ 为距离的距离空间。常用的距离空间有如下几种：

(1) n 维欧氏空间

设 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体所组成的集合，称为 n 维欧氏空间，其中 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是实数。

对于任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，定义

$$\rho(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.1.1}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 空间的距离，因此，按照 $\rho(x,y)$，$\mathbf{R}^n$ 是一个距离空间。

(2) 连续函数空间 $C[a,b]$

令

$$C[a,b]=\{x(t):x(t)\text{是}[a,b]\text{上的连续函数}\} \tag{1.1.2}$$

则称 $C[a,b]$为$[a,b]$上的连续函数空间,在 $C[a,b]$上定义

$$\rho(x,y)=\max|x(t)-y(t)|,\quad t\in[a,b];x(t),y(t)\in C[a,b] \tag{1.1.3}$$

可以证明 $\rho(x,y)$满足距离的 3 个条件,故 $C[a,b]$按照距离 $\rho(x,y)$是一个距离空间。

(3) 平方可积函数空间 $L^2(\mathbf{R})$

令

$$L^2(\mathbf{R})=\left\{x(t):\int_{\mathbf{R}}|x(t)|^2\mathrm{d}t<\infty\right\} \tag{1.1.4}$$

则称 $L^2(\mathbf{R})$为平方可积空间,在 $L^2(\mathbf{R})$上定义

$$\rho(x,y)=\left(\int_{\mathbf{R}}[x(t)-y(t)]^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\quad x,y\in L^2(\mathbf{R}) \tag{1.1.5}$$

则 $L^2(\mathbf{R})$空间按照式(1.1.5)为一距离空间。

(4) 平方可和离散序列空间 $L^2(\mathbf{Z})$

令

$$L^2(\mathbf{Z})=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<\infty\right\} \tag{1.1.6}$$

则称 $L^2(\mathbf{Z})$为平方可和离散序列空间。

若 $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}\in l^2$,$y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots\}\in l^2$,定义

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1.7}$$

则 $L^2(\mathbf{Z})$为一距离空间。

定义 1.1.2　线性空间

设 X 为一非空集合,若在 X 中规定了线性运算——元素的加法和元素的数乘运算,并满足相应的加法或数乘的结合律及分配律,则称 X 为一线性空间或向量空间。对于线性空间的任一向量我们用范数来定义其长度。

定义 1.1.3　线性赋范空间

设 X 为一线性空间,若对于任意 $x\in X$ 有一个确定的非负实数 $\|x\|$ 与它对应,并满足:

① $\forall x\in X$, $\|x\|\geqslant0$,当且仅当 $x=0$ 时, $\|x\|=0$;

② $\forall x\in X$ 及 $\lambda\in\mathbf{R}$, $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$;

③ $\forall x,y\in X$, $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$。

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数,X 为线性赋范空间。向量的范数是向量的大小或长度的一种度量。距离和长度的基本区别在于:距离是指两个对象之间的距离,而长度则是针对一个对象而言的。通过范数可诱导距离:令 $\rho(x,y)=\|y-x\|$,即将两个向量的距离赋值为这两个向量的差的长度(范数)。因此线性赋范空间一定是距离空间,但距离空间不一定是赋范空间。

1.1.2　巴拿赫(Banach)空间

定义 1.1.4　若 X 是一个线性赋范空间,X 中任何柯西(Cauchy)序列 $\{x_i\}$ 都有极限,且极限都在 X 内,则称 X 为巴拿赫空间。

上述柯西序列是指：一个序列$\{x_n\}$，当$n,m\to\infty$时，$\|x_n-x_m\|\to 0$。X中任何柯西序列都收敛到X内的元素，这一性质称之为X的完备性，即一个完备的线性赋范空间是巴拿赫空间。

［**例 1-1**］　对于每个P，$1\leqslant P<\infty$，令$L^p(\mathbf{R})$是$\mathbf{R}$上满足下述条件的可测函数f的类：

$$\int_{\mathbf{R}}|f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty$$

赋予范数：

$$\|f\|_p=\left[\int_{\mathbf{R}}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \tag{1.1.8}$$

可以证明，$L^p(\mathbf{R})$对于上述定义的范数是巴拿赫空间。

1.1.3　希尔伯特空间(Hilbert)

定义 1.1.5　设X为实或复数域上的线性空间，若对于X中的任何一对元素f,g，都有确定的复数与之对应，记为$\langle f,g\rangle$，且满足

① 对称性：$\langle f,g\rangle=\overline{\langle g,f\rangle}$；

② 线性：$\langle \boldsymbol{\alpha} f+\boldsymbol{\beta} g,h\rangle=\boldsymbol{\alpha}\langle f,h\rangle+\boldsymbol{\beta}\langle g,h\rangle\quad \boldsymbol{\alpha}、\boldsymbol{\beta}\in C$；

③ 非负性：$\langle f,f\rangle\geqslant 0$，$\langle f,f\rangle=0$当且仅当$f=0$。

其中$\bar{a}$表示a的复共轭。则称X为内积空间，$\langle f,g\rangle$为f与g的内积。如果X是$\mathbf{R}$上的线性空间，则上述第(1)条件变为$\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$。若内积空间$X$还是完备的，则称$X$为希尔伯特空间。总结如下：

内积空间：引入了内积的线性空间称为内积空间。在内积空间中，对于每个$f\in X$，定义范数

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle} \tag{1.1.9}$$

则X就成为一个线性赋范空间，这个线性赋范空间也称为由内积导入的线性赋范空间。

希尔伯特空间：一个完备的内积空间称为希尔伯特空间。

内积空间有下述性质，设X是内积空间，则有：

(1) schwarz 不等式

$$x、y\in X,\text{则}\ |\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\ \|y\| \tag{1.1.10}$$

(2) 平行四边形等式

$x,y\in X$，则

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2) \tag{1.1.11}$$

(3) 勾股定理

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2 \tag{1.1.12}$$

［**例 1-2**］　线性空间$L^2(\mathbf{R})$中，定义内积为：对任何$f、g\in L^2(\mathbf{R})$，定义

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbf{R}}f(x)\bar{g}(x)\mathrm{d}x$$

易知，这样定义的内积满足内积的3个条件，因此本例中的$L^2(\mathbf{R})$对引入的内积构成一个希尔伯特空间。

［**例 1-3**］　平方可和序列空间$L^2(\mathbf{Z})$中，内积定义为$[a,b]=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n\overline{b_n}$也是希尔伯特空间。

1.1.4 绝对可积和绝对可和空间

定义 1.1.6 若定义

$$\| f \|_1 \equiv \int_x |f| \mathrm{d}x \tag{1.1.13}$$

则称满足 $\| f \|_1 < \infty$ 的 f 为元素的线性空间为绝对可积空间，记为 $L^1(x)$。同样，当定义域为实数域时，记为 $L^1(\mathbf{R})$。

类似地，可定义绝对可和空间 $L^1(\mathbf{Z})$。

以下的例子说明一个平方可积函数不一定是绝对可积的。例如

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+X^2}} \tag{1.1.14}$$

由于

$$\int_{\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \pi \tag{1.1.15}$$

所以 $f \in L^2(\mathbf{R})$，但

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x = \infty \tag{1.1.16}$$

$f \notin L^1(\mathbf{R})$ 。

1.2 基底和框架

一个代数系统或函数空间中的元素往往是无穷多的，在研究它们的关系或表达式时涉及基底及函数展开的问题，因此需要引入基底和框架的概念。

1.2.1 基、正交基和双正交基

定义 1.2.1 由函数序列张成的空间

设 $e_k(t)$ 为一函数序列，X 表示 $e_k(t)$ 所有可能的线性组合构成的集合，即

$$X = \left\{ \sum_k a_k e_k(t); t, a_k \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z} \right\} \tag{1.2.1}$$

称 X 为序列 $e_k(t)$ 张成的线性空间，记作

$$X = \mathrm{span}\{e_k(t)\} \tag{1.2.2}$$

也即对任意 $g(t) \in X$，有

$$g(t) = \sum_k a_k e_k(t) \tag{1.2.3}$$

定义 1.2.2 基底

若 $e_k(t)$ 是线性无关的，使得对任意 $g \in X$，式(1.2.3)中的系数 a_k 取唯一的值，我们称 $\{e_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 为空间 X 的一个基底。基底是一个向量的集合，空间中的任何向量可以表示为基底的线性组合，并且表示是唯一的。

定义 1.2.3 正交

x,y 为内积空间 X 的两个元素，若 $\langle x,y\rangle=0$，则称 x,y 为正交的，用 $x\perp y$ 表示。例如，在高等数学中的积分公式：$\int_0^{2\pi}\cos nx\sin nx\mathrm{d}x=0,m,n\in\mathbf{Z}$，事实上，$\cos nx$ 和 $\sin nx$ 都是函数空间 $L^2(0,2\pi)$ 中的元素，该空间中的内积定义为 $\langle f(x),g(x)\rangle=\int_0^{2\pi}f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x$，因此可以说 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 正交。

定义 1.2.4 标准正交基

若内积空间 X 中元素列 $\{e_k\}$ 满足

$$\langle e_m,e_n\rangle=\delta(m-n)=\begin{cases}0, & m\neq n \quad (\text{体现正交性})\\ 1, & m=n \quad (\text{体现单位性质})\end{cases} \tag{1.2.4}$$

则称 $\{e_n\}$ 为 X 的标准正交基。其中，$\delta(n)$ 为 Dirac 函数，即

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

定义 1.2.5 完全的标准正交基

设 X 为内积空间，$\{e_n\}$ 为 X 中的一个标准正交基，若 $x\in X,x\perp e_n(n=1,2,\cdots)$，则必有 $x=\theta$。换句话说，X 中不再存在非零元素，使它与所有的 e_n 正交，则称 $\{e_n\}$ 为 X 中的完全标准正交基。

定理 设 $\{e_n\}(n=1,2,\cdots)$ 为 Hilbert 空间 X 中的标准正交基，且令 $M=\mathrm{span}\{e_n,n=1,2,\cdots\}$，则下列 4 个条件是等价的：

① $\{e_n\}$ 为 X 的完全标准正交基； (1.2.5)

② $M=X$； (1.2.6)

③ 对 $\forall x\in X,\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2$(Parseval 等式)； (1.2.7)

④ 对 $\forall x\in X,x=\sum_{n=1}^{\infty}[x,e_n]e_n$。 (1.2.8)

称式(1.2.8)为 x 关于完全标准正交基的傅里叶展开，$\langle x,e_n\rangle$ 称为傅里叶展开系数。其几何意义是：x 等于它的各分量 $\langle x,e_n\rangle e_n$ 之向量和。

通过上述定理，把数学分析中的傅里叶展开式推广到了抽象的 Hilbert 空间中，并揭示了完全标准正交基，Parseval 等式(能量守恒定律)及傅里叶展开式之间的本质联系。因此，只要找到这种正交基，则空间中的任意元素均可表示为一个傅里叶级数的形式：

$$g(t)=\sum_k a_k e_k(t) \tag{1.2.9}$$

其中

$$a_k=\langle g(t),e_k(t)\rangle \tag{1.2.10}$$

称为傅里叶级数。例如，复空间中的任何函数可由函数系 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx}\right\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 的线性组合表示出来(复数形式的傅里叶级数)，且 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx}\right\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 满足条件(1.2.4)，因此 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx}\right\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(0,2\pi)$ 的标准正交基。傅里叶级数是用来分析周期为 $T=2\pi$ 的函数的。当周期 $T\to\infty$ 时，可得到任意非周期函数的傅里叶展开，只是这时级数被积分取代了，这就引出了我们熟

悉的傅里叶变换。对于 $\forall f \in L^2(\mathbf{R}^n)$，其傅里叶变换为

$$F(\omega)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\,\mathrm{d}x \tag{1.2.11}$$

标准正交基是一种理想的、具有良好性质的基底。但实际应用中往往很难获得这种基底，一种解决的途径是将原来的标准正交的限制条件放松，进而得到双正交基。

定义 1.2.6　双正交基

对于不满足标准正交条件的基底 $e_k(t)$ 来说，如果存在另一组对偶基底 $\tilde{e}_k(t)$，使得：

$$\langle e_m(t), \tilde{e}_n(t)\rangle=\delta(m-n) \tag{1.2.12}$$

则也可得到形如式(1.2.9)的函数分析和综合公式：

$$g(t)=\sum_k \langle g(t), \tilde{e}_k(t)\rangle e_k(t) \tag{1.2.13}$$

此时，标准正交基存在于原基底 $e_k(t)$ 和对偶基底 $\tilde{e}_k(t)$ 之间，展开式也相应的由原基底和对偶基底构成，这种基称为双正交基，$e_k(t)$ 和 $\tilde{e}_k(t)$ 互为对偶基底。

由正交基和双正交基的概念知道，若函数序列 $e_k(t)$ 是空间 X 的一组正交基，则对于任意函数 $g(t)\in X$，可按式(1.2.9)将其展开；若函数序列 $e_k(t)$ 是空间 X 的一组双正交基，则对于任意函数 $g(t)\in X$，可按式(1.2.13)将其展开。在这两种展开形式下，其展开系数是唯一的。因为无论正交基还是双正交基，它们的基元素之间都是不相关的。但是，正交基往往对误差较敏感，而且正交基的获得也比较困难。在工程应用中，往往放宽了正交性的要求，使得基底函数之间有部分的相关性和冗余度，这就是框架。

1.2.2　框架和紧框架

定义 1.2.7　框架

设 H 为一 Hilbert 空间，$\{\psi_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 为 H 中的一个函数序列，若对于任意 $f\in H$，存在 $0<A<B<\infty$，使得下述不等式成立：

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{j\in\mathbf{Z}} |[f,\psi_j]|^2 \leqslant B\|f\|^2 \tag{1.2.14}$$

则称 $\{\psi_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 为一个框架；称 A、B 分别为框架的上、下界。框架常数 $B<\infty$ 保证了变换 $f\to\{\langle f,\psi_j\rangle\}$ 是连续的，常数 $0<A$ 保证了变换式是可逆的，并且有连续的逆变换，这样用框架 $\{\psi_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 就能完全刻画函数 $f\in H$。框架提供了一种冗余表示，在框架中称比值 B/A 为冗余比或冗余因子。

定义 1.2.8　紧框架

若 $A=B$，则称此框架为一紧框架，此时式(1.2.14)变为

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\langle f,\psi_j\rangle|^2 = A\|f\|^2 \tag{1.2.15}$$

由式(1.2.15)可推得

$$f=A^{-1}\sum_j \langle f,\psi_j\rangle\psi_j \tag{1.2.16}$$

需要特别指出，满足式(1.2.16)的紧框架 $\{\psi_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 一般并非正交的。

［**例 1-4**］　设空间 H 为 $\mathbf{C}^2$，即二维向量的空间，取

$$\boldsymbol{e}_1=(0,1),\boldsymbol{e}_2=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right),\boldsymbol{e}_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

如图 1.1 所示。对任意矢量 $\boldsymbol{V} = (v_1, v_2) \in \boldsymbol{C}^2$，有

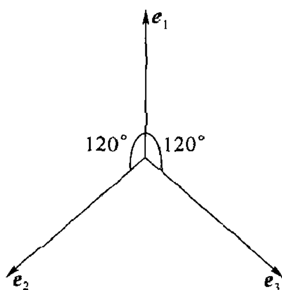


图 1.1 紧框架

$$\sum_{j=1}^{3} |\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{e}_j \rangle|^2 = |v_2|^2 + \left| -\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2$$

$$= \frac{3}{2}[|v_1|^2 + |v_2|^2] = \frac{3}{2}\|\boldsymbol{V}\|^2 \qquad (1.2.17)$$

由此可知，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 构成了 $\boldsymbol{C}^2$ 空间的一个紧框架，且 $A = B = 3/2$，但它显然不是一个正交基，因为 $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 = 0$，显然三者是相关的。框架界 3/2 给出了这个离散框架的冗余度(用三个矢量描述二维空间)。

1.2.3 信号的重构

若 $A = B = 1$，$\|\psi_j\| = 1 (j \in \mathbf{Z})$，则此时 ψ_j 为一正交基，并且

$$f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j \qquad (1.2.18)$$

式(1.2.18) 给出了紧框架情况下由 $\langle f, \psi_j \rangle$ 重建原函数的公式。下面推导当 $A \neq B$ 时，由 $\langle f, \psi_j \rangle$ 重建原函数的公式。首先定义算子 F 为：$Ff = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j$，记作$g$。则其逆运算可表示成

$$f = F^{-1}g = F^{-1}\left[\sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j\right] = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_j \rangle F^{-1} \psi_j \qquad (1.2.19)$$

令 $F^{-1}\psi_j = \tilde{\psi}_j$，则式(1.2.19) 可写为

$$f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_j \rangle \cdot \tilde{\psi}_j \qquad (1.2.20)$$

以上说明重建原函数的关键在于寻找 ψ_j 的对偶序列 $\tilde{\psi}_j$。对偶的严谨数学推导较为复杂，这里不作讨论，只把一些主要结果列举如下：

(1) $\tilde{\psi}_j$ 也构成一个框架，其上、下界恰与 ψ_j 的上、下界呈倒数关系，即

$$B^{-1}\|f\|^2 \leqslant \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\langle f, \tilde{\psi}_j \rangle|^2 \leqslant A^{-1}\|f\|^2 \qquad (1.2.21)$$

(2) 当 A 与 B 比较接近时，作为一阶近似，可取

$$\tilde{\psi}_j = \frac{2}{A+B}\psi_j \qquad (1.2.22)$$

因此

$$f(t)\approx \frac{2}{A+B}\sum_{j\in \mathbf{Z}}\langle f,\psi_j\rangle \cdot \psi_j(t) \tag{1.2.23}$$

若计入误差

$$f(t)=\frac{2}{A+B}\sum_{j\in \mathbf{Z}}\langle f,\psi_j\rangle\psi_j(t)+R_f \tag{1.2.24}$$

式中 R_f 表示 $f(t)$作一阶逼近的残差。

$$\| R\| \leqslant \frac{B-A}{B+A}=\frac{r}{2+r},r=\frac{B}{A}-1 \tag{1.2.25}$$

所以

$$\| R_f\| =\| R\| \cdot \| f\| =\frac{r}{2+r}\| f\| \tag{1.2.26}$$

由式(1.2.21)可知,对 H 中的函数 $f(t)$,用一个框架所能刻画的信息能量虽然不像用一个标准正交基所能刻画的那样,正好等于 $\| f(t)\|^2$,但是当 $A=B$ 且接近 1 时,它们是近似相等的。所以,框架可提供对 H 的另一种表达方式。事实上,当 $A=B$ 时,即在紧框架下,对于任何 $f(t)\in H$,有式(1.2.15)成立。且由此可推出

$$f(t)=A^{-1}\sum_{j\in \mathbf{Z}}\langle f,\psi_j\rangle\psi_j \tag{1.2.27}$$

式(1.2.27)说明,一般而言,紧框架也不是标准正交基,但是它可提供函数的一个冗余表示。

若$\{\psi_j\}$是 H 的一个紧框架,且 $A=1$,则$\{\psi_j\}$就构成 H 的正交系,再若 $\|\psi_j\|=1$,则$\{\psi_j\}$就构成 H 的一个标准正交基。事实上,任取 $\psi_m\in\{\psi_j\}$,由式(1.2.15)得到

$$\|\psi_m\|^2=\sum_n|\langle\psi_m,\psi_n\rangle|^2=\|\psi_m\|^2+\sum_{m\neq n}|\langle\psi_m,\psi_n\rangle|^2 \tag{1.2.28}$$

由此得到

$$\sum_{m\neq n}|\langle\psi_m,\psi_n\rangle|^2=0 \tag{1.2.29}$$

所以

$$\langle\psi_m,\psi_n\rangle=0,\quad m\neq n \tag{1.2.30}$$

对于任何 $f(t)\in H$,若设$\langle f(t),\psi_j\rangle=0$ 对所有的 n 成立,由式(1.2.27)可得 $f(t)=0$。这说明框架概念其实是基的更一般的形式。

[**例 1-5**] 在例 1-4 中二维向量的空间取

$$\boldsymbol{e}_1=(0,1),\boldsymbol{e}_2=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right),\boldsymbol{e}_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

是一个框架且是紧框架。框架界为 $A=B=3/2$。为了由分解系数$\{\langle v,\boldsymbol{e}_i\rangle,i=1,2,3\}$重构矢量 $\boldsymbol{V}$,我们需要对偶框架$\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\tilde{\boldsymbol{e}}_2,\tilde{\boldsymbol{e}}_3\}$使得

$$\boldsymbol{V}=\sum_{i=1}^{3}[v,\boldsymbol{e}_i]\tilde{\boldsymbol{e}}_i \tag{1.2.31}$$

成立。由于每个矢量 $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ 有两个分量,共有 6 个未知数,而矢量方程式(1.2.31)有两个分量方程式,每一个方程式的两边必须对任意$(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2)$成立。这样共有 4 个方程式,因而有无限多个解。比如,选定

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1=(1,0) \tag{1.2.32}$$

则

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}_2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{V}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_2\right)\tilde{e}_{21}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{V}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_2\right)\tilde{e}_{31} \\ \boldsymbol{V}_2=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{V}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_2\right)\tilde{e}_{22}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{V}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_2\right)\tilde{e}_{32} \end{cases} \tag{1.2.33}$$

令等式两边关于 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$ 的系数相等，得：

$$\tilde{e}_2=\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}},1\right];\quad \tilde{e}_3=\left[\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}},1\right] \tag{1.2.34}$$

这样式(1.2.32)和式(1.2.34)就给出了框架$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$的一个可能的对偶框架。从此例可以看出，一般地说框架不是线性无关的，而它的对偶也不是唯一的。

1.2.4 Riesz 基

定义 1.2.9 如果函数序列$\{\psi_n(x)\}$对于任何数列$\{c_n\}\in l^2$，能使

$$A\|c_n\|^2\leqslant\left\|\sum_n|c_n\psi_n(x)|\right\|^2\leqslant B\|c_n\|^2 \tag{1.2.35}$$

成立，则称$\{\psi_n(x)\}$为一个 Riesz 基。式中 $0<A\leqslant B$，A、B 分别称为 Riesz 下界和上界。可以证明 Riesz 条件式(1.2.35)是较框架条件更严格的条件，即满足 Riesz 条件的函数族$\{\psi_n(x)\}$一定满足框架条件式(1.2.14)，但反过来说则不成立。

当$\{\psi_n(x)\}$为 Riesz 基时，可定义如下矩阵算子：

$$\boldsymbol{M}\equiv\langle\gamma_{m,n}\rangle_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2} \tag{1.2.36}$$

式中的矩阵元素

$$\gamma_{m,n}=\langle\psi_m,\psi_n\rangle \tag{1.2.37}$$

Riesz 条件保证了矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是正定的，可逆的。于是有

$$\boldsymbol{M}^{-1}=\langle\mu_{j,k}\rangle_{(j,k)\in\mathbf{Z}^2} \tag{1.2.38}$$

式中元素 $\mu_{j,k}$ 与 $\boldsymbol{M}$ 的元素 $\gamma_{m,n}$ 之间有以下关系

$$\sum_m\mu_{j,k}\gamma_{m,n}=\delta_{j,n} \tag{1.2.39}$$

这样一来，利用下式构造的函数族

$$\tilde{\psi}_j(x)=\sum_n\mu_{j,k}\psi_n(x) \tag{1.2.40}$$

将满足对偶条件

$$[\tilde{\psi}_j,\psi_n]=\delta_{j,n} \tag{1.2.41}$$

可见，Riesz 基$\{\psi_n\}$的对偶函数$\{\tilde{\psi}_j\}$是唯一确定的。

1.2.5 函数的基本性质

下面介绍小波变换和时频分析中经常用到的一些函数的性质。

1. 函数的紧支撑性(compact support)

函数 $f(t)$的支集或支撑区记为 Supp f，它是指最大开集，而开集 E 被定义为$t\in E$ 时有 $f(t)=0$，换句话说，函数 $f(t)$在一个最小的闭子集或区间$[a,b]$有值，而在$[a,b]$区间外函数 $f(t)=0$。我们说函数 $f(t)$是紧支集就是指 $f(t)$的支撑区 Supp f 是紧支集，即 Supp $f\subset[a,b]$，$[a,b]$为有界闭区间。一个序列 u 是紧支撑的，就是说有有限多个元素在域

中不为零，称此为有限支撑的；对于域 R^n，说 u 是紧支撑的，是指支集是有界的，即存在某一 $R<\infty$，使得 $s,t\in \mathrm{Supp}\,u$，而有 $|t-s|<R$。其中最小的 R 称作函数 u 的支集宽度或直径，用 $d(\mathrm{Supp}\,u)$ 表示。

2. 函数的平滑性

如果函数 $f(t)$ 的任意 $n(n\in N)$ 次导数都是连续的，则称该函数 $f(t)$ 是平滑的。若函数 $f(t)$ 有 $\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$ 连续，且 $0\leqslant n<\alpha$，则称该函数 $f(t)$ 的平滑度为 α，通常用 C^α 来表示这类函数。为了定量描述函数 $f(t)\in C^\alpha$ 的光滑程度（$\forall\alpha>0$）可利用下面的关系式来测量

$$f(t)\in C^\alpha \Leftrightarrow \int_{\mathbf{R}} |F(\omega)|(1+|\omega|)^{1+\alpha}\mathrm{d}\omega<+\infty \tag{1.2.42}$$

其中，$F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的傅里叶变换。

3. 函数的速降性

函数 $f(t)$ 有无限速降性是指 $\forall n\in N$ 存在一个有限常数 $K_n>0$，使得 $\forall t\in\mathbf{R}$ 都有 $|t^n f(t)|<K_n$，也常称作无限超代数衰减性。若 $\delta>0$ 使得 $|f(t)|<K\mathrm{e}^{-\delta|t|}$ 成立，则称函数 $f(t)$ 是无限指数衰减的。

4. 消失矩

若函数 $f(t)$ 具有如下特性

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\mathrm{d}t=0, k=0,1,\cdots,K-1 \tag{1.2.43}$$

则称该函数 $f(t)$ 具有 K 阶消失矩，亦称该函数 $f(t)$ 的正则性(regularity)为 K。$f(t)$ 的消失矩条件意味着 $f(t)$ 的傅里叶变换直到 K 阶导数在原点为零，即

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}F(\omega)\big|_{\omega=0}=0 \tag{1.2.44}$$

这个性质就是傅里叶变换 $F(\omega)$ 局部性能的度量。

1.3 傅里叶级数和连续傅里叶变换

傅里叶分析是数字信号处理的基础，也是现代信号处理的出发点。从信号的傅里叶变换，能看出信号各种不同频率成分的强弱以及信号在频率域的分布。傅里叶变换主要分为连续傅里叶变换和离散傅里叶变换。本节及以下几节将简要介绍傅里叶级数、离散傅里叶变换以及窗口傅里叶变换等概念和基本原理。

1.3.1 傅里叶级数

设 $f(t)$ 是周期为 T_0 的周期函数，且 $f(t)$ 在一个周期内满足以下狄里赫利条件：

① 具有有限个间断点，

② 具有有限个极值点，

③ 绝对可积 $\int_{t_0}^{T_0+t_0}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$，

则在连续点处有：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{1.3.1}$$

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{T_0+t_0} f(t)e^{-jN\omega_0}\,dt \tag{1.3.2}$$

C_n 称为函数 $f(t)$ 的傅里叶级数。其三角形式为

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)] \tag{1.3.3}$$

其中

$$a_n=\frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{T_0+t_0} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$b_n=\frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{T_0+t_0} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

傅里叶级数把函数分解成一组归一化正交系函数(正弦波)上的叠加,刻画了在频域的每个离散点上信号的成分,即一个均匀的离散谱。

1.3.2 连续傅里叶变换

傅里叶级数把信号分解为离散谱上函数的叠加,但是在对频率变化敏感的某些应用中,离散的频率信息显得太粗糙,傅里叶变换就是傅里叶级数在连续情况下的推广。

令 $f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上满足:

① $f(t)$在任一有限区间上满足狄里赫利条件,

② $f(t)$ 在无限区间$(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt<\infty$,

则有下列等式成立:

$$F(u)=\int_{\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi ut}\,dt \tag{1.3.4}$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j2\pi ut}\,du \tag{1.3.5}$$

其中 t 为时域变量,u 为频域变量。如果 $\omega=2\pi u$,则有:

$$\mathscr{F}\{f(t)\}=F(\omega)=\int_{\infty}^{+\infty} f(t)e^{\ j\omega t}\,dt \tag{1.3.6}$$

式中 $j=\sqrt{-1}$,$e^{-j\omega t}=\cos\omega t-j\sin\omega t$

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)\}=\int_{\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \tag{1.3.7}$$

通常把式(1.3.6)和式(1.3.7)称为傅里叶变换对。

函数 $f(t)$的傅里叶变换一般是一个复量,可以表示为

$$F(\omega)=\mathbf{Re}\,\omega+j\mathbf{Im}\,\omega \tag{1.3.8}$$

$$F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\phi(\omega)} \tag{1.3.9}$$

$$|F(\omega)|=\sqrt{\mathbf{Re}^2\omega+\mathbf{Im}^2\omega} \tag{1.3.10}$$

$$\phi(\omega)=\arctan\frac{\mathbf{Im}\,\omega}{\mathbf{Re}\,\omega} \tag{1.3.11}$$

$|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的傅里叶谱，而 $\phi(\omega)$ 称为相位谱。

傅里叶变换可以推广到二维的情况。如果 $f(x,y)$ 是连续和可积的，且 $F(u,v)$ 是可积的，则存在如下的傅里叶变换对

$$\mathscr{F}\{f(x,y)\} = F(u,v) = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.3.12}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(u,v)\} = f(x,y) = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} F(u,v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{1.3.13}$$

式中 u,v 是频率变量。

1.4　离散傅里叶变换

1.4.1　离散傅里叶变换的定义

离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform，DFT) 建立了离散时域和离散频域之间的联系，使得数学方法与计算机建立了联系，拓宽了傅里叶变换的应用领域。

假定以间隔 Δt 对一个连续函数 $f(t)$ 均匀采样，采样后的序列表示成

$$f(t) = f(t_0 + \Delta t) \tag{1.4.1}$$

被采样函数的离散傅里叶变换定义为

$$F(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega t/N} \tag{1.4.2}$$

式中 $\omega = 0,1,2,\cdots,N-1$。反变换为

$$f(t) = \sum_{t=0}^{N-1} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\omega t/N} \tag{1.4.3}$$

式中 $t = 0,1,2,\cdots,N-1$。

式(1.4.2) 给出的离散傅里叶变换中，$\omega = 0,1,2,\cdots,N-1$ 分别对应于 $0,\Delta\omega,2\Delta\omega,\cdots,(N-1)\Delta\omega$ 处傅里叶变换的采样值，即 $F(\omega)$ 表示 $F(\omega\Delta\omega)$。除了 $F(\omega)$ 的采样是用频率进行采样之外，该表示法和离散的 $f(t)$ 所用的表示相似。可以证明 $\Delta\omega$ 和 Δt 的关系为

$$\Delta\omega = 1/(N\Delta t) \tag{1.4.4}$$

在二维的情况下，离散的傅里叶变换对表示为

$$\begin{aligned} &F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\mathrm{e}^{[-\mathrm{j}2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})]} \\ &u = 0,1,2,\cdots,M-1 \\ &v = 0,1,2,\cdots,N-1 \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

$$\begin{aligned} &f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\mathrm{e}^{[\mathrm{j}2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})]} \\ &x = 0,1,2,\cdots,M-1 \\ &y = 0,1,2,\cdots,N-1 \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

1.4.2 离散傅里叶变换的性质

1. 周期性和共轭对称性

若离散傅里叶变换和它的反变换周期为 N,则有：

$$F(u,v)=F(u+N,v)=F(u,v+N)=F(u+N,v+N) \tag{1.4.7}$$

共轭对称性可表示为

$$F(u,v)=\overline{F}(-u,-v) \tag{1.4.8}$$

$$|F(u,v)|=|F(-u,-v)| \tag{1.4.9}$$

2. 分离性

一个二维傅里叶变换可由连续两次一维傅里叶变换实现。式(1.4.5)可分成下面两式：

$$F(x,v)=M\left\{\frac{1}{MN}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\mathrm{e}^{\left[-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{vy}{N}\right)\right]}\right\} \quad v=0,1,\cdots,N-1 \tag{1.4.10}$$

此式表示对每一个 x 值,$f(x,y)$先沿每一行进行一次一维傅里叶变换。再将 $F(x,v)$ 沿每一列再进行一次一维傅里叶变换,就可得到二维傅里叶变换 $F(u,v)$,即

$$F(u,v)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}F(x,v)\mathrm{e}^{\left[-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{ux}{M}\right)\right]} \quad u,v=0,1,\cdots,N-1 \tag{1.4.11}$$

3. 平移性质

傅里叶变换对的平移性可由下式表示：

$$f(x,y)\mathrm{e}^{[\mathrm{j}2\pi(u_0x+v_0y)/N]}\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0) \tag{1.4.12}$$

和

$$f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(u,y)\exp[-\mathrm{j}2\pi(u_0x+v_0y)/N] \tag{1.4.13}$$

4. 旋转性质

首先借助极坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,u=\omega\cos\phi,v=\omega\sin\phi$ 将 $f(x,y)$和 $F(u,v)$转换为 $f(r,\theta)$和 $F(\omega,\phi)$。直接将它们代入傅里叶变换对得到：

$$f(r,\theta+\theta_0)\Leftrightarrow F(\omega,\phi+\theta_0) \tag{1.4.14}$$

式(1.4.14)表明,对 $f(x,y)$旋转 θ_0 的傅里叶变换对应于其傅里叶变换 $F(u,v)$也旋转 θ_0。类似地,对 $F(u,v)$旋转 θ_0 也对应于将其傅里叶反变换 $f(x,y)$旋转 θ_0。

5. 分配律

根据傅里叶变换对的定义可得到：

$$\mathscr{F}\{f_1(x,y)+f_2(x,y)\}=\mathscr{F}\{f_1(x,y)\}+\mathscr{F}\{f_2(x,y)\} \tag{1.4.15}$$

式(1.4.15)表明傅里叶变换和逆变换对加法满足分配律,但对乘法则不满足。

6. 尺度变换(缩放)

给定两个标量 a 和 b,可证明傅里叶变换有以下两式成立：

$$af(x,y)\Leftrightarrow aF(u,v) \tag{1.4.16}$$

$$f(ax,by)\Leftrightarrow\frac{1}{|ab|}F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right) \tag{1.4.17}$$

7. 平均值

对二维离散函数 $f(x,y)$,其平均值可用下式表示：

$$\bar{f}(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y) \tag{1.4.18}$$

如将 $u=v=0$ 代入式(1.4.18),得

$$F(0,0)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)=\bar{f}(x,y) \tag{1.4.19}$$

8. 离散卷积定理

设 $f(x,y)$、$g(x,y)$ 分别是 $A\times B$ 和 $C\times D$ 的两个离散函数,则它们的离散卷积定义为

$$f(x,y)*g(x,y)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(m,n)g(x-m,y-n) \tag{1.4.20}$$

式中 $x=0,1,\cdots,M-1,y=0,1,\cdots,N-1;M=A+C-1,N=B+D-1$。

对式(1.4.20)两边进行傅里叶变换有

$$\begin{aligned}F\{f(x,y)*g(x,y)\}&=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\Big\{\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)g(x-m,y-n)\Big\}\exp\Big[-\mathrm{j}2\pi\Big(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\Big)\Big]\\&=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)\exp\Big[-\mathrm{j}2\pi\Big(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\Big)\Big]\cdot\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}g(x-m,y-n)\\&\quad\exp\Big[-\mathrm{j}2\pi\Big(\frac{u(x-m)}{M}+\frac{v(y-n)}{N}\Big)\Big]\\&=F(u,v)G(u,v)\end{aligned} \tag{1.4.21}$$

这就是空间域卷积定理,即两个二维离散函数在空间域中的卷积可通过求它们相应的两个傅里叶变换乘积的反变换而得。反之,在频域中的卷积可通过在空间域中乘积的傅里叶变换而得。

9. 离散相关定理

大小为 $A\times B$ 和 $C\times D$ 的两个离散函数 $f(x,y)$、$g(x,y)$ 的互相关定义为

$$f(x,y)*g(x,y)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f^*(m,n)g(x+m,y+n) \tag{1.4.22}$$

式中 $M=A+C-1,N=B+D-1$。则相关定理为

$$\mathscr{F}\{f(x,y)*g(x,y)\}=F^*(u,v)G(u,v) \tag{1.4.23}$$

1.5 窗口傅里叶变换

傅里叶分析在平稳信号分析和处理中有着突出的贡献,因为它可将复杂的时域信号转换到频域中,用频谱特性去分析和表示时域信号的特性,但是一些常用信号不是平稳的,例如语音信号、音乐信号、探地信号等,它们的频域特性都是随时间而变化的。对这些非平稳的信号,人们常常需要了解某些局部时段上所对应的主要频率特性和某些频率信息出现在哪些时段上,也就是说需要了解短时时域信号所对应的局部频域特性,即时-频局部化要求。但是,傅里叶变换对以上问题是无能为力的。

分析傅里叶变换的表达式

$$F(\omega)=\int_{\mathbf{R}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t,\quad \omega\in\mathbf{R}$$

傅里叶变换要求提供 $f(t), t\in\mathbf{R}$ 的全部信息，即使截取短时段信号 $f(t)$，$t\in[-T/2,T/2]$，但 $F(\omega)$ 提供的是关于 $\omega\in\mathbf{R}$ 的全部信息，主要反映这个短时段时域信号的那些局部频域特性却无法知道。另外，时域信号 $f(t)$ 的局部改变会影响其 $F(\omega)$ 的全局改变，$F(\omega)$ 在某个特定的 ω^* 处的表现不可能通过局部时域信号得到，它需要提供 $f(t)$，$t\in\mathbf{R}$ 的全部信息。时域中某点的局部变化会影响频域全局；同样，频域中的某点的局部变化也会影响到全部时域。因此，傅里叶变换没有时-频局部化功能。

1946 年 D. Gabor 提出了窗口傅里叶变换，也称做短时傅里叶变换(Short-Time Fourier Transform)或 Gabor 变换。其基本思想是：把信号划分成许多小的时间间隔，用傅里叶变换分析每个时间间隔，以便确定该时间间隔存在的频率。

1.5.1 窗口傅里叶变换的定义

窗口傅里叶变换：在传统的傅里叶分析之前，对信号进行加窗处理，如图 1.2(a)所示。其做法是用一个时间函数 $g(t)$ 做窗口函数，该时间函数在有限区间外恒等于零(紧支集)，或很快趋于零。用 $g(t-b)$ 与待分析信号 $f(t)$ 相乘，其作用相当于在 $t=\tau$ 处开了个“窗口”，然后再对乘积进行傅里叶变换。

定义 1.5.1 设 $g(t)$ 满足 $0<\int_{\mathbf{R}}|g(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty$，则称

$$\int_{\mathbf{R}} f(t)g(t-b)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1.5.1}$$

为窗口傅里叶变换，记为 $G_f(\omega,b)$，其中 $g(t)$ 称为基本窗函数。

一般窗函数 $g(t)$ 是选择在 $|t|>t_0$ 时迅速趋于零的所谓“钟形”函数，这样信号 $f(t)$ 在乘以平移滑动的窗 $g(t-b)$ 后，有效地抑制了 $t=b$ 的邻域以外的信号，所以再对 $f(t)g(t-b)$ 进行傅里叶变换所得的结果反映的是 $t=b$ 时刻附近的局部频谱信息，从而达到了时域局部化的目的，图 1.2(b)说明了窗函数的作用。

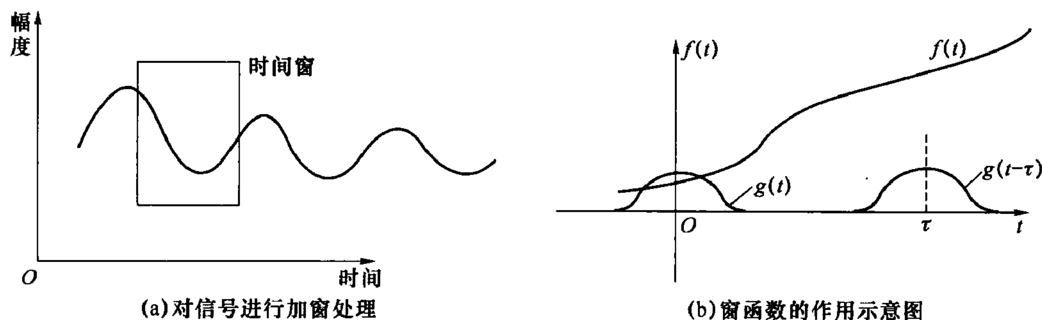


图 1.2 信号的加窗处理及窗函数的作用

下面再看窗口傅里叶变换在频域局部化方面的作用。

由于

$$G_f(\omega,b)=\int_{\mathbf{R}} f(t)g(t-b)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = F(\omega) * \{G(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega b}\} \tag{1.5.2}$$

其中，$G(\omega)$ 是窗口函数 $g(t)$ 的傅里叶变换。所以，$G_f(\omega,b)$ 实际上描述的是频谱 $F(\omega)$ 经过

$G(\omega)$卷积平滑后的结果(相差一个相位因子)。如果$G(\omega)$在ω附近是有局部化作用的(当然为此应取$g(t)$满足此条件),则频域信息$F(\omega)$就在ω附近被局部化了。

总之,粗略地讲,窗口傅里叶变换$G_f(\omega,b)$是在$t=b$附近观察时域信号$f(t)$,在ω附近观察频域信号$F(\omega)$。所以说,只要合适地选择窗函数$g(t)$,就可同时达到时-频局部化要求。

1.5.2 时窗、频窗和时频窗

窗函数具有保留被分析信号的局部特征的作用,而被保留下来的信号的宽度和位置就成为重要的特征,因此,引入窗函数的中心和半径的概念,分别表征窗函数的位置和集中程度。

定义 1.5.2 设$g(t)$是窗函数,称

$$t^* = \int_{\mathbf{R}} t|g(t)|^2\mathrm{d}t \Big/ \int_{\mathbf{R}} |g(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1.5.3}$$

为时窗中心,称

$$\Delta t = \left[\int_{\mathbf{R}} (t-t^*)^2|g(t)|^2\mathrm{d}t \Big/ \int_{\mathbf{R}} |g(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.5.4}$$

为时窗半径。

可令

$$\int_{\mathbf{R}} |g(t)|^2\mathrm{d}t = 1 \tag{1.5.5}$$

窗函数$g(t)$的时窗中心和时窗半径分别为

$$t^* = \int_{\mathbf{R}} t|g(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1.5.6}$$

$$\Delta t = \left[\int_{\mathbf{R}} (t-t^*)^2|g(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.5.7}$$

在以上定义下,时窗函数$g(t)$的窗口为

$$[t^*-\Delta t, t^*+\Delta t] \tag{1.5.8}$$

窗口宽度为$2\Delta t$。

按照定义,可推出窗函数$g(t-b)$的时窗中心和时窗半径的表达式

$$t^*[g(t-b)] = t^*[g(t)]+b \tag{1.5.9}$$

$$\Delta t[g(t-b)] = \Delta t \tag{1.5.10}$$

类似地,可定义频窗中心和频窗半径。

定义 1.5.3 设$g(t)$是时窗函数,则称$G(\omega)$是频窗函数,称

$$\omega^* = \int_{\mathbf{R}} \omega|G(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \Big/ \int_{\mathbf{R}} |G(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{1.5.11}$$

是频窗中心,称

$$\Delta\omega = \left[\int_{\mathbf{R}} (\omega-\omega^*)^2|G(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \Big/ \int_{\mathbf{R}} |G(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.5.12}$$

是频窗半径。

当频窗平移η后,即频窗为$G(\omega-\eta)$,则可推出相应的频窗中心和频窗半径分别为

$$\omega^*[G(\omega-\eta)] = \omega^*+\eta \tag{1.5.13}$$

$$\Delta\omega[G(\omega-\eta)] = \Delta\omega \tag{1.5.14}$$

由以上定义可知，$g(t)$与$G(\omega)$分别起着时窗和频窗的作用。而在时-频坐标系中，时窗和频窗共同作用的结果，就形成时-频窗，它是时-频局部化的几何直观描述，如图1.3所示。

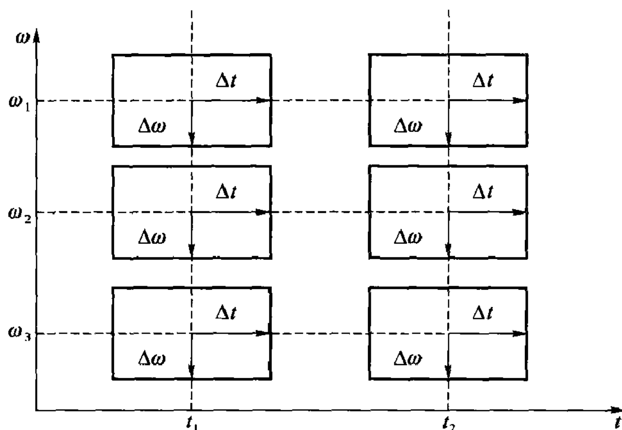


图1.3 时-频窗示意图

可以看到，只要窗函数$g(t)$确定后，时频窗的宽度Δt和$\Delta\omega$都是常量，不随时间位移窗的中心位置t^*和ω^*而改变。这种时频窗结构通常称为固定时频窗，而小波分析则具有时变的（或者自适应的）时频窗，因此小波分析具有很多优点。

1.5.3 窗函数的条件

由以上可知，如果$g(t)$是时窗函数，则要求式(1.5.6)和式(1.5.7)定义的t^*和Δt均为有限值，即要求$\int_{\mathbf{R}} t^2|g(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty$，或者为简单起见，判断条件简化为

$$|g(t)|<1/|t|^{\frac{3}{2}},|t|\to+\infty \tag{1.5.15}$$

类似地，如果$G(\omega)$是频窗函数，则需满足

$$|G(\omega)|<1/|\omega|^{\frac{3}{2}},|\omega|\to+\infty \tag{1.5.16}$$

即要想一个函数与$g(t)$一样作为时窗，其谱函数$G(\omega)$作为频窗，则$g(t)$和$G(\omega)$应同时具有较强的衰减性。

因此，不是任何的函数都可以作为窗函数，例如$\delta(t)$、$\sin(t)$都不能作为窗函数，因为它们都不具备时频同时局部化的特征。

［**例1-6**］ Gauss窗函数$g(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4a}}, a>0$，求时窗中心、时窗半径以及相应的频窗中心和频窗半径。

解 由于$\int_{\mathbf{R}}|g(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{4\pi a}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{2\pi a}}$

$$\int_{\mathbf{R}} t^2|g(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{\mathbf{R}}\frac{t^2}{4\pi a}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{a}{8\pi}}$$

$$\int_{\mathbf{R}} t|g(t)|^2\mathrm{d}t=0$$

所以，$t^*=0,\Delta t=\sqrt{\sqrt{\frac{a}{8\pi}}\Big/\frac{1}{2\sqrt{2\pi a}}}=\sqrt{a}$。

相应的频窗函数应为

$$G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\int e^{-\frac{t^2}{4a}}\cdot e^{j\omega t}dt=e^{-a\omega^2}$$

由计算知

$$\int_{\mathbf{R}}|G(\omega)|^2 d\omega=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

$$\int_{\mathbf{R}}\omega^2|G(\omega)|^2 d\omega=\frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

所以 $\omega^*=0,\Delta\omega=\sqrt{\frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\cdot\sqrt{\frac{2a}{\pi}}}=\frac{1}{\sqrt{4a}}$，时-频窗面积为 $A=(2\Delta t)(2\Delta\omega)=2\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}=2$。

由此例中可看出，时窗半径和频窗半径是成反比的，也就是说，时窗若减小必然引起频窗的增大。这表明，Δt、$\Delta\omega$ 不可能同时变小，也就是说不能同时提高在时域和频域的分辨率。这个结果对一般的情形也是成立的。事实上，有著名的海森堡测不准原理：

$$\Delta t\cdot\Delta\omega\geqslant C(C\text{ 是一常数})$$

1.5.4 窗口傅里叶反变换公式

由于窗口傅里叶变换就是对 $f(t)\cdot g(t-b)$ 的傅里叶变换：

$$G_f(\omega,b)=\int_{\mathbf{R}}f(t)g(t-b)e^{-j\omega t}dt \tag{1.5.17}$$

所以由傅里叶变换的逆变换，有

$$f(t)g(t-b)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}G_f(\omega,b)\cdot e^{j\omega t}d\omega \tag{1.5.18}$$

对式(1.5.18)两边同乘 $g(t-b)$，则有

$$f(t)[g(t-b)]^2=\frac{1}{2\pi}g(t-b)\int_{\mathbf{R}}G_f(\omega,b)\cdot e^{j\omega t}d\omega \tag{1.5.19}$$

两边对 b 积分，则有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi A}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}G_f(\omega,b)e^{j\omega t}g(t-b)d\omega db \tag{1.5.20}$$

其中

$$A=\int_{\mathbf{R}}[g(t-b)]^2 db=\int_{\mathbf{R}}g^2(t)dt \tag{1.5.21}$$

式(1.5.20)和式(1.5.21)就是窗口傅里叶变换的反变换公式。它可看成信号 $f(t)$ 用"基"$e^{j\omega t}\cdot g(t-b)$ 的展开式，而系数 $G_f(\omega,b)$ 可看成在时频点 (b,ω) 邻域内对信号 $f(t)$ 的贡献的大小。

1.5.5 窗口傅里叶变换的局限性

就时-频局部化而言，窗口傅里叶变换在傅里叶分析的基础上取得了本质的进步。用

窗口傅里叶分析信号可在时-频窗这个局部范围内对信号进行观察，时-频窗面积反映了时-频局部化的精细程度，窗口越小，精度越高。那么是否可以选择某个窗函数，能够使时-频窗面积充分小呢？海森堡测不准原理表明，信号在一个域内的压缩必然导致它在另一个域内的拉伸，分辨率在时频两域内不能同时无限制地减小。实际应用中，往往是在这种限制下取一个折中的宽度。低频信号在较大的时间范围内幅值变化慢，其频率范围窄，因此用于分析低频信号的时-频窗的时窗宽度应该比较宽，频窗宽度应该比较窄；高频信号在较小的时间范围内幅值变化快，其频率范围宽，因此用于分析高频信号的时-频窗应该是时窗窄频窗宽。以高斯窗函数 $g_a(t-b)$ 为例，选定 a，其时-频窗形状确定；$f(t)\cdot\omega(t-b_1)$ 和 $f(t)\cdot\omega(t-b_2)$ 这两处局部化信号的频带和频率中心不变，时-频窗从 b_1 处移至 b_2 处。为了分析局部低频信号，可选择较大的参数 a，使 Δt 增大，$\Delta\omega$ 变窄；为了分析局部高频信号，可选择较小的参数 a，使 Δt 变窄，$\Delta\omega$ 变宽。通过调整参数 a 来分析同一信号的不同时段，显得很麻烦。此时需要一种自适应的时-频局部化方法。也就是说，选择某个窗函数，希望其时-频窗形状是自适应变化的，对低频信号，其窗口形状自动变得扁平，对高频信号，其窗口形状自动变得瘦长。对于这方面的要求，窗口傅里叶是无能为力的。

在时-频局部分析中往往还要求将频域分成若干个细小频带，进一步分析信号在各个频带中的表现；往往要分析局部的时域信号的局部频域特性，局部时域信号在各个子频带中的局部表现；对于这些要求，窗口傅里叶也是无能为力的。下面介绍的小波分析方法对满足这些要求作出了杰出的贡献。

1.6 小波发展简史

小波分析是当前数学中一个迅速发展的新领域，它同时具有理论深刻和应用十分广泛的双重意义。小波分析起源于信号分析领域，是近半个世纪以来傅里叶分析发展史上里程碑式的进展，是调和分析这一数学领域许多学者多年辛勤劳动的结晶，近年来它的理论研究与应用研究已为数学家、理论物理学家和工程技术人员所密切关注。

1822 年傅里叶发表了《热传导解析理论》，从那以后，傅里叶变换逐渐发展成为信号处理中的一个最为重要的分析工具，在科学和技术的许多领域中获得了广泛的应用。对于稳恒过程或稳定分布信号，傅里叶变换给出了近乎完美的结果。但傅里叶变换只是一种纯频域的分析方法，不能提供任何局部时间段上的频率信息。相反，当一个信号用 δ 函数展开时，它在时间域的定位是完全准确的，而在频域却无任何定位性，也即 δ 函数分析所反映的只是信号在全频率上的整体时域特征，而不能提供任何频段所对应的时间信息。然而，在自然界和科学技术中还有大量信号，它们具有局部的或定域的特性，例如远处空中的目标、被鉴别的指纹、语言信号、声纳信号、各种电脉冲等，这些信号的不显著为零的分量只出现在一个短暂的时间间隔或有限空间内，此后很快衰减到零，称为暂态过程或时变过程。对这一类时变信号进行分析，通常需要提取某一时间段（瞬间）的频域信息或某一频率段所对应的时间信息，显然用傅里叶分析或 δ 函数分析是无能为力的。首先，我们仅对有限时间间隔内的信号感兴趣，没有必要在过去、现在及将来的无限长时间范围内对时间信号进行分析；类似地，在处理定域内的空间图像时，也没有必要对全平面内的信号进行全局的分析。因此，寻

求一种介于傅里叶分析和 δ 函数分析之间的，并具有一定的时间和频率分辨率的基函数来分析信号，一直是信号处理工程人员和数学家长期以来努力的目标。

为了研究信号在局部时间范围的频域特征，1946 年 Gabor 提出了著名的 Gabor 变换，之后又进一步发展为短时傅里叶变换。但由于短时傅里叶变换的定义决定了其窗函数的大小和形状均与时间频率无关而保持固定不变，这对于分析时变信号来说是不利的。高频信号一般持续时间很短，而低频信号持续时间较长，因此，我们期望对于高频信号采用小时间窗，对于低频信号则采用大时间窗进行分析。此外，在进行数值计算时，人们希望将基函数离散化，以节约计算时间及存储量，但 Gabor 基无论怎样离散，都不能构成一组正交基，因而给数值计算带来了不便，这些都是 Gabor 变换的不足之处。

小波变换是一种信号的时间-频率（时间-尺度）分析方法，是近年来发展起来的新的学科分支，它的思想来源于伸缩与平移方法。小波分析的提出最早是在 1910 年 Haar 提出的规范正交基。1938 年，Littlewood-Paley 对傅里叶级数建立了 L-P 理论，即按二进制频率成分分组。1965 年 Galderon 发现了再生公式，它的离散形式已接近小波展开。1981 年 Stormberg 对 Haar 系进行了改进，证明了小波函数的存在性。同年，法国地理学家 J. Morlet 在分析地震数据时提出将地震波按一个确定函数的伸缩、平移系展开，将任意一个信号分解成对空间和频率的贡献，首先提出了小波分析这一概念。1986 年，Meyer 及其学生 Lemarie 提出多尺度分析思想，后来 Mallat 受金字塔算法的启示，提出了以多分辨分析为基础的快速小波算法——Mallat 算法（FWT），这是小波理论突破性的成功。

小波变换不仅继承和发展了窗口傅里叶变换的局部化的思想，而且克服了窗口大小不随频率变化、缺乏离散正交基的缺点。和傅里叶变换、窗口傅里叶变换相比，小波变换是一个时间和频率的局域变换，它适用于处理局部或暂态信号，因而能有效地从信号中提取信息，通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行多尺度细化分析（Multiscale Analysis），解决了傅里叶变换不能解决的许多困难问题，从而小波变化被誉为“数学显微镜”，近年来，大量的数学家、物理学家、各学科工程技术人员投入了极大的重视和研究，由此将小波分析的理论发展与实际应用推向了一个高潮。其中比利时女数学家 I. Daubechies 撰写的《小波十讲（Ten Lectures on Wavelets）》对小波的普及起了重要的推动作用。

小波分析的应用是与小波分析的理论研究紧密地结合在一起的。现在，它已经在科技信息产业领域取得了令人瞩目的成就。电子信息技术是六大高新技术中重要的一个领域，它的重要方面是图像和信号处理。现今，信号处理已经成为当代科学技术工作的重要部分，信号处理的目的就是：准确的分析、诊断、编码压缩和量化、快速传递或存储、精确地重构（或恢复）。从数学的角度来看，信号与图像处理可以统一看做是信号处理（图像可以看做是二维信号），在小波分析的许多应用中，都可以归结为信号处理问题。现在，对于其性质随时间是稳定不变的信号，处理的理想工具仍然是傅里叶分析。但是在实际应用中的绝大多数信号是非稳定的，而特别适用于非稳定信号的工具就是小波分析。

小波分析的应用领域十分广泛，它包括：数学领域的许多学科；信号分析、图像处理；量子力学、理论物理；军事电子对抗与武器的智能化；计算机分类与识别；音乐与语言的人工合成；医学成像与诊断；地震勘探数据处理；大型机械的故障诊断等方面。例如，在数学方面，它已用于数值分析、构造快速数值方法、曲线曲面构造、微分方程求解、控制论等；在信号分析方面的滤波、去噪声、压缩、传递等；在图像处理方面的图像压缩、分类、识别与诊断，去污

等;在医学成像方面的减少B超、CT、核磁共振成像的时间,提高分辨率等。下面简单介绍小波的几个主要应用。

(1) 在数值分析中的应用。例如,Galerkin方法是传统求解微分方程和积分方程的有效方法,这种方法几乎在任何线性分析的问题中都能达到一定的精度。随着小波理论的出现,一种新的数值分析——Wavelet-Galerkin方法的产生,是对Galerkin方法的改进和提高,能更加有效地求解微分方程和积分方程,亦能很好地求解线性问题和非线线性问题,与此同时产生了Wavelet finite element method(小波有限元方法)、Wavelet edge element method(小波边界元方法),极大地丰富了数值分析的内容。

(2) 信号消噪处理。以小波分析为基础的信号去噪方法是把含噪声信号放在二维平面上作小波变换,根据信号和噪声在变换后所表现出来的截然不同的特性,采取局部极大阈值法、全局单一阈值法、局部SURE多阈值法和可浮动自适应阈值法等进行分时分频处理,从而去掉噪声,此方法不但能获得较高的信噪比,而且能够保持良好的分辨率。

(3) 数据图像处理。数据压缩是伴随小波分析诞生的最早应用领域,由此带来巨大的经济效益和社会效益,如美国耶鲁大学以R. Coifman教授等人为代表的小波研究组用小波分析对美国联邦局存储的3亿个指纹进行了数据压缩,取得了20倍原有效益的成果。此外,小波分析在图像压缩与图像边缘检测中的应用,一直是国内外科技工作者乐此不疲的热点,同时也取得了巨大的进展。

(4) 语音分析与处理。基于小波分析的语音分析与处理主要内容有:清/浊音分割;基音检测与声门开启时刻定位;去噪、重建与压缩方面。国内外研究表明,小波应用于语言信号特征提取、事件检测、语音合成、波形编码等方面已取得很好的成果,充分显示了小波分析的卓越性能。

(5) 光学信息处理。在小波分析出现以前,傅里叶变换一直是光学信息处理的重要工具,而随着小波变换的光学系统实现,小波空域和小波空频域匹配滤波器理论的建立,光学技术的高度并行处理能力和宽的空间带宽,小波变换在光学信息处理领域的优越性逐渐显现出来,从而为光学信息处理、光计算、光通信等带来了新的变化。

(6) 机械故障诊断与监控。信号中的奇异点及不规则的突变部分通常带有比较重要的信息,它是信号的重要特征之一。故障常表现为输出信号发生突变,于是突变点的检测在故障诊断中有着重要的意义。小波变换具有空间局部化的性质,利用小波变换来分析信号的奇异性及奇异性位置和奇异性大小,在大型机组的机械故障诊断与监控中,与传统的傅里叶变换相比显得更有效。

(7) 工业CT成像。工业CT远比医学CT复杂,医学CT的对象始终是人,而工业CT的对象来自工业、国防、邮电通信等各行各业,体积大小不一、结构千变万化。卷积反投影方法是工业CT成像中经常采用的一种关键技术,而将小波分析用于卷积反投影方法已成功地开辟了一条崭新的技术路线。

第2章 连续小波变换

利用窗口傅里叶变换对信号进行分析，相当于用一个形状、大小和放大倍数相同的"放大镜"在时-频相平面上移动，观察某固定长度时间内的频率特性，但是这种做法有时不适合信号本身的规律。实际中信号的规律是：对信号的低频分量（波形较宽）必须用较长的时间段才能得到完整的信息；而对信号的高频分量（波形较窄）必须用较短的时间段以得到较好的精度。由此分析可知，更合适的做法是"放大镜"的长、宽是可以变化的，它在时-频相平面的分布应如图 2.1 所示的那样。

引进了小波变换的概念后，就可以达到上述目的。

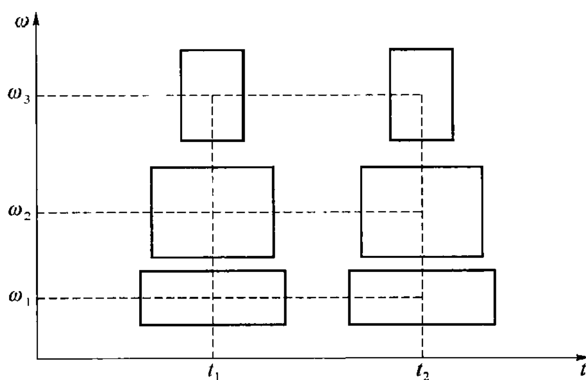


图 2.1 较理想的时-频平面

2.1 小波基函数

小波分析主要研究在特定的函数空间，用某种方法构造一种称为小波的基函数（小波基函数），对给定的信号（函数）进行展开与逼近，根据展开式研究信号的某些特性及逼近的效果。

定义 2.1.1 小波函数

设 $\psi(t)$满足条件：

① $\psi(t)$为一平方可积函数，即 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$；

② $0<\int_0^{+\infty}\frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega<+\infty$, (2.1.1)

其中，$\Psi(\omega)$为 $\psi(t)$的傅里叶变换，则称 $\psi(t)$为一个小波母函数(Mother Wavelet)或小波函数，式(2.1.1)为小波函数的可容性条件。

由小波的定义知，小波函数一般具有以下特点：

(1) 小——它们在时域都具有紧支集或近似紧支集。原则上讲，任何满足可容许性条件式(2.1.1)的 $L^2(\mathbf{R})$空间的函数都可作为小波母函数(包括实数函数或复数函数、紧支集或非紧支集函数、正则或非正则函数等)。但一般情况下，常常选取紧支集或近似紧支集的(具有时域的局部性)具有正则性的(具有频域的局部性)实数或复数函数作为小波母函数，以使小波母函数在时频域都具有较好的局部特性，如图 2.2 所示。

(2) 波动性——由于小波母函数满足可容许性条件式(2.1.1)，则必有$\Psi(\omega)|_{\omega=0}=0$，也即直流分量为零，由此可以断定小波具有正负交替的波动性。如图 2.2 所示。



图 2.2　小波

定义 2.1.2　小波基函数　将小波函数 $\psi(t)$进行伸缩和平移有

$$\psi_{a,\tau}(t)=a^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\quad(a>0,\tau\in\mathbf{R})\tag{2.1.2}$$

其中 a 为伸缩因子(或尺度因子)；τ 为平移因子；称 $\psi_{a,\tau}(t)$为依赖于 a,τ 的小波基函数。由于 a,τ 是连续变化的值，因此称$\{\psi_{a,\tau}(t)\}$为连续小波基函数，它们是由同一母函数$\psi(t)$经伸缩平移后的一组函数序列。可见，小波函数一定是具有带通性质的窗函数。图2.3给出一个小波函数 $\psi(t)$及其尺度伸缩与平移的例子。

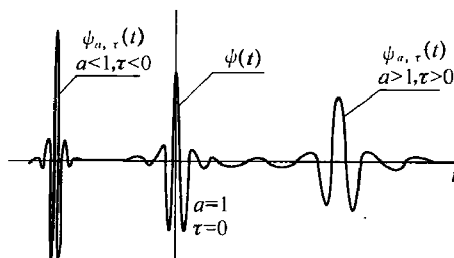


图 2.3　小波及其尺度伸缩与平移

由式(2.1.2)可知：函数 $\psi_{a,\tau}(t)$是通过在小波母函数 $\psi(t)$中引入参数 a 和 τ 演变而来的。图 2.3 也画出了小波函数在 $a<1,\tau<0$ 和 $a>1,\tau>0$ 两种情况下的 $\psi_{a,\tau}(t)$的波形。从中可直观看出：参数 τ 确定了小波函数的“中心”位置；参数 a 确定了小波函数的时域宽度。具体地说，如果 $\psi(t)$的时域宽度为 Δt，时域中心为 $t^*=0$，那么 $\psi_{a,\tau}(t)$的时域宽度为

$$(\Delta t)_{a,\tau}=a\Delta t\tag{2.1.3}$$

时域中心为

$$(t^*)_{a,\tau}=\tau\tag{2.1.4}$$

图 2.3 中的小波函数的频谱 $|\Psi(\omega)|$ 如图 2.4 所示。

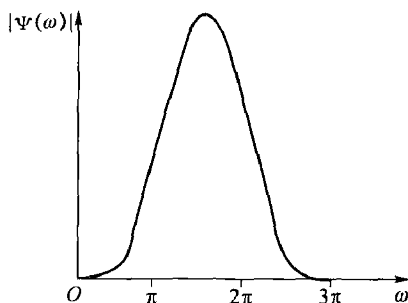


图 2.4 图 2.3 中的小波函数的频谱 $|\Psi(\omega)|$

现在来考察参数 a 对 $\psi_{a,\tau}(t)$ 频域特性的影响。根据傅里叶变换的尺度伸缩性质可知，如果 $\psi(t)$ 的中心频率为 ω^*，频率窗宽度为 $\Delta\omega$，则 $\Psi_{a,\tau}(\omega)$ 的频宽变为

$$(\Delta\omega)_{a,\tau}=\Delta\omega/a \tag{2.1.5}$$

中心频率变为

$$(\omega^*)_{a,\tau}=\omega^*/a \tag{2.1.6}$$

可见，时移因子 τ 仅仅影响窗口在相平面时间轴上的位置，而尺度因子 a 不仅影响窗口在频率轴上的位置，也影响窗口的形状。

当 a 增大时，时窗中心位置变大，频窗中心位置变小，时频窗往低频移动，对应于低频分析；当 a 减小时，时窗中心位置变小，频窗中心位置变大，时频窗往高频移动，对应于高频分析。

同时，当 a 增大时，小波基函数 $\psi_{a,\tau}(t)$ 被拉伸，函数的时窗变宽，其频域波形 $\Psi_{a,\tau}(\omega)$ 被压缩，频窗变窄；当 a 减小时，$\psi_{a,\tau}(t)$ 被压缩，时窗变窄，频窗变宽。

2.2 连续小波变换及其性质

2.2.1 连续小波变换

将任意 $L^2(\mathbf{R})$ 空间中的函数 $f(t)$ 在小波基下进行展开，称这种展开为函数 $f(t)$ 的连续小波变换(Continue Wavelet Transform，CWT)，其表达式为

$$\mathrm{WT}_f(a,\tau)=\langle f(t),\psi_{a,t}(t)\rangle=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{\psi}\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\mathrm{d}t \tag{2.2.1}$$

由 CWT 的定义可知，小波变换同傅里叶变换一样，都是一种积分变换。同傅里叶变换相似，我们称 $\mathrm{WT}_f(a,\tau)$ 为小波变换系数。由于小波基不同于傅里叶基，因此小波变换与傅里叶变换有许多不同之处。其中最重要的是，小波基具有尺度 a、时移 τ 两个参数，因此，将函数在小波基下展开，就意味着将一个时间函数投影到二维的时间-尺度相平面上。并且，

由于小波基本身所具有的特点，将函数投影到小波变换域后，有利于提取函数的某些本质特征。从时域分析的角度来看，小波变换具有如下特点：

将 CWT 的式(2.2.1)同窗口傅里叶变换相比较，若令

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)=\psi_{a,\tau}(t)=g(t-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{2.2.2}$$

则 CWT 可看成为是一个窗口傅里叶变换。任意函数在某一尺度 a、时移点 τ 上的小波变换系数，实质上表征的是在 τ 位置处，时间段 $a\Delta t$ 上包含在中心频率为$\frac{\omega_0}{a}$、带宽为$\frac{\Delta\omega}{a}$频窗内的频率分量大小。根据式(2.1.5)、式(2.1.6)，随着尺度 a 的变化，对应窗口中心频率$\frac{\omega_0}{a}$及窗口宽度$\frac{\Delta\omega}{a}$也发生变化。而窗口傅里叶变换的窗口是固定不变的(即不随 ω 的变化而变化)。因此，与窗口傅里叶变换本质不同的是，小波变换是一种变分辨率的时频联合分析方法，它对不同的频率在时域上的取样步长是自适应调节的，即在低频时小波变换的时间分辨率较低，而频率分辨率较高；在高频时小波变换的时间分辨率较高，而频率分辨率较低，这正符合低频信号变化缓慢而高频信号变化迅速的特点。当分析低频(对应大尺度)信号时，其时间窗很大，而当分析高频(对应小尺度)信号时，其时间窗减小。这恰恰符合实际问题中高频信号的持续时间短、低频信号持续时间较长的自然规律。因此，从总体上来说，小波变换比窗口傅里叶变换具有更好的时频窗口特性。

一般来说，连续小波变换主要用于问题的分析和理论研究方面，由于计算机的普及，使得离散小波变换的使用更加广泛，而连续小波变换可以深入透彻地理解小波变换的基本性质和分析信号的基本方法。

2.2.2　连续小波变换的性质

连续小波变换除了具有可变的时频窗以外，与傅里叶变换一样，它还具有很多其他的性质。

性质 1　线性性质

连续小波变换是线性变换，也就是说一个函数的连续小波变换等价于该函数各分量的连续小波变换。利用连续小波变换的定义可直接证明该性质。

设 $f(t)$、$g(t)\in L^2(\mathbf{R})$，k_1、k_2 是任意常数，则

$$\mathrm{WT}_{k_1f+k_2g}(a,\tau)=k_1\mathrm{WT}_f(a,\tau)+k_2\mathrm{WT}_g(a,\tau) \tag{2.2.3}$$

证明

$$\begin{aligned}\mathrm{WT}_{k_1f+k_2g}(a,\tau)&=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbf{R}}[k_1f(t)+k_2g(t)]\overline{\psi}\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{k_1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbf{R}}f(t)\overline{\psi}\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\mathrm{d}t+\frac{k_2}{\sqrt{a}}\int_{\mathbf{R}}g(t)\overline{\psi}\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\mathrm{d}t\\&=k_1\mathrm{WT}_f(a,\tau)+k_2\mathrm{WT}_g(a,\tau)\end{aligned}$$

性质 2　平移不变性性质

设 $f(t)$的小波变换为 $\mathrm{WT}_f(a,\tau)$，则 $f(t-t_0)$的小波变换为 $\mathrm{WT}_f(a,\tau-t_0)$。即

$$\mathrm{WT}_{f(t-t_0)}(a,\tau)=\mathrm{WT}_{f(t)}(a,\tau-t_0) \tag{2.2.4}$$

证明 令 $t-t_0=u$，则

$$\mathrm{WT}_{f(t-t_0)}(a,\tau)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbf{R}}f(t-t_0)\bar{\psi}\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbf{R}}f(u)\bar{\psi}\left[\frac{u-(\tau-t_0)}{a}\right]\mathrm{d}u=\mathrm{WT}_{f(t)}(a,\tau-t_0)$$

该性质表明，延时后的信号 $f(t-t_0)$ 的小波变换系数可由原信号 $f(t)$ 的小波系数在 τ 轴上进行同样的时移得到。

性质 3 尺度变换性质

设 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，则

$$\mathrm{WT}_{f(\lambda t)}(a,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{WT}_{f(t)}(\lambda a,\lambda\tau)\,(\lambda>0) \tag{2.2.5}$$

证明

$$\mathrm{WT}_{f(\lambda t)}(a,\tau)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbf{R}}f(\lambda t)\bar{\psi}\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\mathrm{d}t,\lambda t=u$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbf{R}}f(u)\bar{\psi}\left(\frac{u-\tau\lambda}{\lambda a}\right)\cdot\frac{1}{\lambda}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{\lambda a}}\int_{\mathbf{R}}f(u)\cdot\bar{\psi}\left(\frac{u-\tau\lambda}{\lambda a}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{WT}_{f(t)}(\lambda a,\lambda\tau)$$

此定理表明，当信号 $f(t)$ 作某一倍数伸缩时，其小波变换将在 a,τ 两轴上作同一比例的伸缩，但是不发生失真变形。这是小波变换成为“数学显微镜”的重要依据。

性质 4 内积定理

设 $f(t)$、$g(t)\in L^2(\mathbf{R})$，以基本小波 $\psi_{a,\tau}(t)$ 分别对 $f(t)$、$g(t)$ 作小波变换：

$$f(t)\leftrightarrow\mathrm{WT}_f(a,\tau),g(t)\leftrightarrow\mathrm{WT}_g(a,\tau)$$

则

$$\langle f(t),g(t)\rangle=\frac{1}{C_\psi}\langle\mathrm{WT}_f(a,\tau),\mathrm{WT}_g(a,\tau)\rangle \tag{2.2.6}$$

其中

$$C_\psi=\int_0^{+\infty}\frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega \tag{2.2.7}$$

这就是小波变换的内积定理，也叫 Moyal 定理。右边的内积是对 a 和 τ 的双重积分，而且由于小波变换定义式中 a 以倒数形式出现，所以微分为$\frac{\mathrm{d}a}{a^2}$。这样便可写出内积定理更具体的形式为

$$\int_{\mathbf{R}}f(t)g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{C_\psi}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{WT}_f(a,\tau)\overline{\mathrm{W}}\mathrm{T}_g(a,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.2.8}$$

性质 5 微分性质

根据平移不变性性质可以得出小波变换的微分运算具有可交换性，即

如果 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，$f(t)$ 的连续小波变换是 $\mathrm{WT}_f(a,\tau)$。令 $y(t)=\frac{\partial f(t)}{\partial t}$，则有

$$\mathrm{WT}_y(a,\tau)=\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{WT}_f(a,\tau) \tag{2.2.9}$$

性质 6　能量性质

在式(2.2.6)中,取 $f(t)=g(t)$,可得出与傅里叶变换中的 Parseval 等式类似的等式

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2}\left|\mathrm{WT}_f(a,\tau)\right|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}a = C_\Psi\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{2.2.10}$$

它描述了函数的小波变换与原函数之间的能量关系,即小波变换幅度平方的积分和信号的能量成正比。该性质说明信号 $f(t)$ 的小波变换并没有损失信号的任何信息。

2.3　连续小波变换的逆变换与再生核

2.3.1　连续小波变换的逆变换

与其他积分变换一样,小波变换只有在其逆变换存在的条件下才有实际意义。对连续小波变换而言,如果采用的小波满足可容许条件(2.1.1),则其逆变换存在,也即根据信号的小波系数就可重构原信号。小波变换的逆变换公式或重构公式如下:

设 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$,则

$$f(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2}\mathrm{WT}_f(a,\tau)\cdot\psi_{a,\tau}(t)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}a \tag{2.3.1}$$

证明:在式(2.2.6)中取 $g(t)=\delta(t-x)$,则

$$\int_{\mathbf{R}}f(t)\bar{g}(t)\mathrm{d}t=\int_{\mathbf{R}}f(t)\delta(t-x)\mathrm{d}t=f(x) \tag{2.3.2}$$

$$\mathrm{WT}_g(a,\tau)=\int_{\mathbf{R}}\delta(t-x)\bar{\psi}_{a,\tau}(t)\mathrm{d}t=\psi_{a,\tau}(x) \tag{2.3.3}$$

将式(2.3.2)、(2.3.3)代入式(2.2.6)中,有

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2}\mathrm{WT}_f(a,\tau)\psi_{a,\tau}(x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}a=C_\psi f(x) \tag{2.3.4}$$

从而有

$$f(x)=\frac{1}{C_\psi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2}\mathrm{WT}_f(a,\tau)\psi_{a,\tau}(x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}a \tag{2.3.5}$$

由上述逆变换公式(2.3.1)的推导过程可知,要想使小波变换有意义,小波函数需满足小波的容许条件式(2.1.1),由此可推出

$$\Psi(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}t=0 \tag{2.3.6}$$

由式(2.1.1)可知 $\psi(t)$ 应具有快速衰减性,由式(2.3.6)可知 $\psi(t)$ 应具有波动性。可以想像 $\psi(t)$ 的图像是快速衰减的振动曲线,从这里也能看出 $\psi(t)$ 被称为小波的原因。

2.3.2　连续小波变换的冗余与再生核

由式(2.2.11)所示的小波变换的反变换公式可知,$f(t)$ 可由它的小波变换 $\mathrm{WT}_f(a,\tau)$

精确地重建。它也可看成将 $f(t)$ 按基 $\psi_{a,\tau}(t)$ 的分解，系数就是 $f(t)$ 的小波变换。但是基 $\psi_{a,\tau}(t)$ 的参数 a、τ 是连续变化的，所以 $\psi_{a,\tau}(t)$ 之间不是线性无关的，也就是说，它们之中有"冗余"，这就导致 $\mathrm{WT}_f(a,\tau)$ 之间有相关性。更具体的表述如下：

对于 $a=a_1,\tau=\tau_1$，有

$$\begin{aligned}\mathrm{WT}_f(a_1,\tau_1)&=\int_{\mathbf{R}}f(t)\psi_{a_1,\tau_1}(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{C_\psi}\left(\int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{R}}\mathrm{WT}_f(a,\tau)\psi_{a,\tau}(t)\cdot\frac{1}{a^2}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}a\right)\psi_{a_1,\tau_1}(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{C_\psi}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{a^2}\mathrm{WT}_f(a,\tau)\left(\int_{\mathbf{R}}\psi_{a,\tau}(t)\cdot\bar{\psi}_{a_1,\tau_1}(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}a\\&=\int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{a^2}\mathrm{WT}_f(a,\tau)K_\psi(a,a_1,\tau,\tau_1)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}a\end{aligned}\tag{2.3.7}$$

其中

$$K_\psi(a,a_1,\tau,\tau_1)=\frac{1}{C_\psi}\int_{\mathbf{R}}\psi_{a,\tau}(t)\psi_{a_1,\tau_1}(t)dt\tag{2.3.8}$$

式(2.3.7)说明 (a_1,τ_1) 处的小波变换 $\mathrm{WT}_f(a_1,\tau_1)$ 可以由半平面 $0<a<+\infty$，$-\infty<\tau<+\infty$ 上点 (a,τ) 处的小波变换 $\mathrm{WT}_f(a,\tau)$ 表示出，系数是 $K_\Psi(a,a_1,\tau,\tau_1)$，称为小波变换的再生核，它描述了连续半平面 (a,τ) 上的两个不同点 (a,τ) 和 (a_1,τ_1) 之间的 CWT 的相关关系。由于任意信号的小波变换的值在 (a,τ) 半平面上是相关的，因此某一点 (a_1,τ_1) 处小波的小波变换值 $\mathrm{WT}_f(a_1,\tau_1)$ 可以表示成半平面上其他各处小波变换系数的总贡献。若 $\psi_{a,\tau}(t)$ 与 $\psi_{a_1,\tau_1}(t)$ 正交时，由式(2.3.7)知 $K_\psi(a,a_1,\tau,\tau_1)=0$。此时 (a,τ) 处的小波变换 $\mathrm{WT}_f(a,\tau)$ 对 $\mathrm{WT}_f(a_1,\tau_1)$ 的"贡献"为零，而那些使 $\psi_{a,\tau}(t)$ 与 $\psi_{a_1,\tau_1}(t)$ 不正交的 (a,τ) 处的小波变换就要对 (a_1,τ_1) 处的小波变换作"贡献"。所以，要使各点小波变换之间没有相关，需要在函数族 $\{\psi_{a,\tau}(t)\}$ 中寻找相互正交的基函数。

可以看出，再生核方程说明两点问题：

(1) 连续小波基函数形成了一组非正交的过渡完全基，任意函数的小波展开系数之间有一个相关关系。CWT 是冗余的，(a_0,τ_0) 处 CWT 取值可由其它值通过再生核构造出来。

(2) 不是任意二维函数 $F(u,v)$ 都可能是一个函数 $f(t)$ 的小波变换，小波变换必须满足再生核方程约束。

2.4 常见的小波基函数

与标准傅里叶变换相比，小波分析中用到的小波函数具有不唯一性，即小波函数 $\psi(t)$ 具有多样性。许多函数在满足有关条件下都可以用作小波，下面介绍常用的几个小波。

1. Morlet 小波

Morlet 小波是以法国地球物理学家 Morlet 命名的，1984 年前后，Morlet 在分析地震波的局部性质时，发现传统的傅里叶变换难以达到要求，而引入小波概念时使用的小波。该小

波是高斯包络下的单频率复正弦函数。其数学表达式为

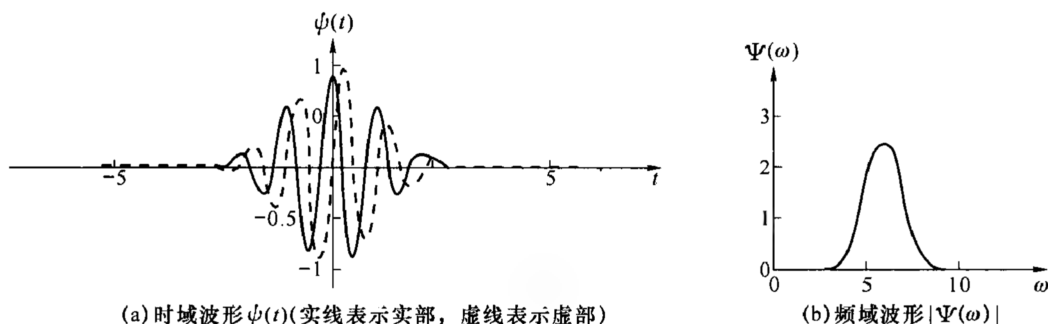
$$\psi(t)=\pi^{-\frac{1}{4}}(e^{j\omega_0 t}-e^{-\omega_0^2/2})e^{-t^2/2} \tag{2.4.1}$$

其满足小波允许条件 $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\,dt=0$。

Morlet 小波的傅里叶变换为

$$\Psi(\omega)=(4\pi)^{1/4}[e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}-e^{-\omega_0^2/2}e^{-\omega^2/2}] \tag{2.4.2}$$

Morlet 小波如图 2.5 所示。



(a) 时域波形 $\psi(t)$（实线表示实部，虚线表示虚部）　　(b) 频域波形 $|\Psi(\omega)|$

图 2.5　Morlet 小波

从式(2.4.2)可以看出，当 $\omega=0$ 时，$\Psi(\omega)\neq 0$，但当 $\omega_0\geqslant 5$，$e^{-\omega_0^2/2}\approx 0$，它近似的满足容许条件，并且它的一阶导数、二阶导数在 $\omega=0$ 处近似为零。此时，式(2.3.3)的第 2 项可以忽略，因此，Morlet 小波通常可近似表示为

$$\psi(t)=\pi^{-\frac{1}{4}}(e^{j\omega_0 t})e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{2.4.3}$$

其相应的傅里叶变换为

$$\Psi(\omega)=(4\pi)^{1/4}[e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}] \tag{2.4.4}$$

在实际应用中，为了处理方便，常采用式(2.4.3)所表示的 Morlet 小波。Morlet 小波是复值小波，能提取被分析的时间过程或信号的幅值与相位信息，在时频两域都有很好的局部性，常用于复数信号的分解及时频分析中。

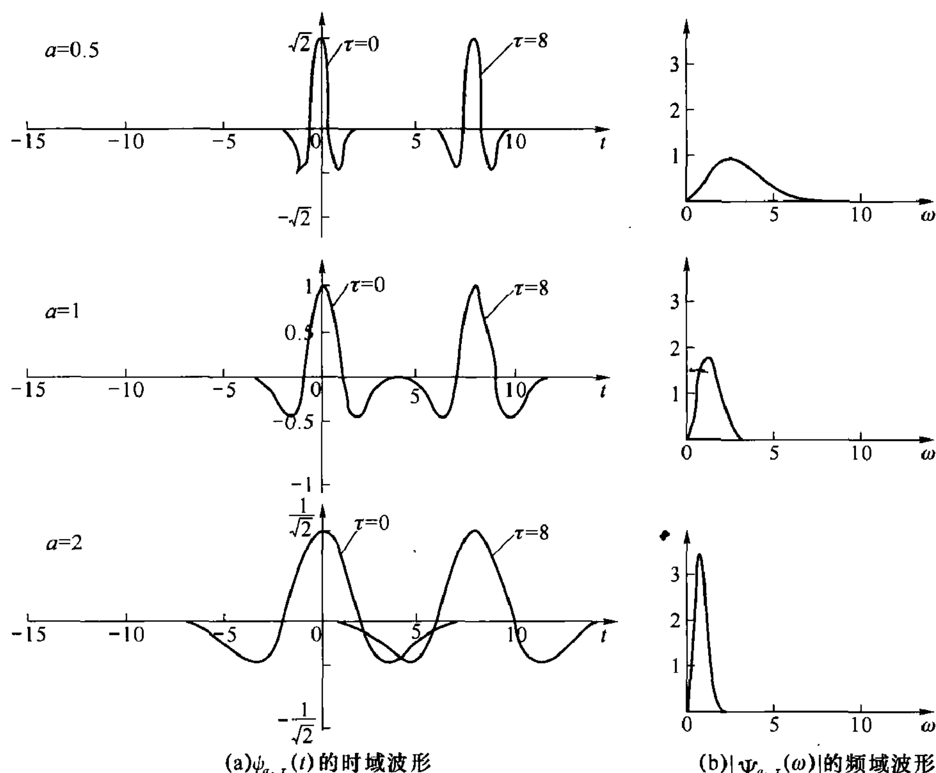
2. Marr 小波

Marr 小波的形状像一个墨西哥草帽，因此有时也被称为墨西哥草帽小波(Mexican hat function)，如图 2.6 所示。其时域、频域形式分别如下：

$$\psi(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1-x)^2e^{-t^2/2} \tag{2.4.5}$$

$$\Psi(\omega)=\frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{3}}\pi^{1/4}\omega^2e^{-\omega^2/2} \tag{2.4.6}$$

在 $\omega=0$ 处，$\Psi(\omega)$ 有二阶零点，所以满足容许条件，而且小波系数随 $|\omega|\to\infty$ 衰减较快，比较接近人眼视觉的空间响应特性。



(a)$\psi_{a,\tau}(t)$的时域波形　　(b)$|\Psi_{a,\tau}(\omega)|$的频域波形

图 2.6　Marr 小波(墨西哥草帽小波)

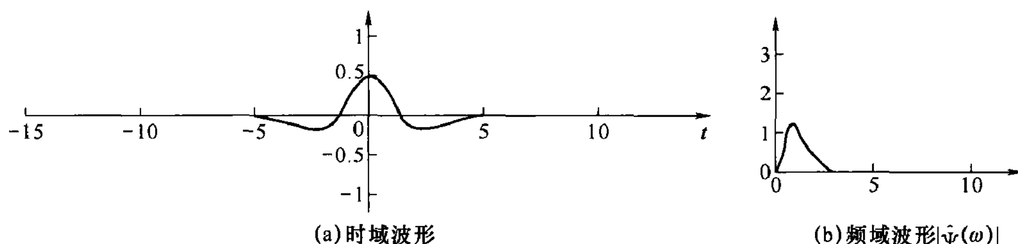
3. DOG(Difference of Gaussian)小波

DOG 小波是两个高斯函数之差,它是墨西哥草帽小波的良好近似,其波形如图 2.7 所示,其时域、频域形式分别为

$$\psi(t)=\mathrm{e}^{-t^2/2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2/8} \tag{2.4.7}$$

$$\hat{\Psi}(\omega)=\sqrt{2\pi}\left(\mathrm{e}^{-\omega^2/2}-\mathrm{e}^{-2\omega^2}\right) \tag{2.4.8}$$

在 $\omega=0$ 处,它的傅里叶变换具有二阶零点,即满足 $\hat{\Psi}(0)=0$ 及 $\hat{\Psi}'(0)=0$。



(a)时域波形　　(b)频域波形$|\hat{\Psi}(\omega)|$

图 2.7　DOG 小波

4. Harr 小波

Harr 小波是数学家 Harr 于 1910 年提出的,是已知小波中最早被提出的小波,也是最简单的小波。Harr 函数是一组互相正交归一的函数集,Harr 小波是由 Harr 函数衍生

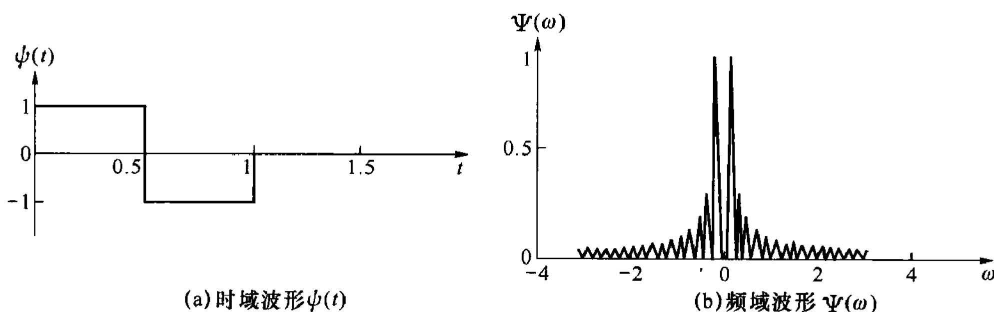
而来，是支撑域在 $t\in[0,1]$ 范围内的单个矩形波，Harr 小波波形如图 2.8 所示。其数学表达式为

$$\psi(t)=\begin{cases}1 & 10\leqslant t<\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\leqslant t<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\tag{2.4.9}$$

其频率域形式为

$$\Psi(\omega)=i\,\frac{4}{\omega}\sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{i\omega}{2}}\tag{2.4.10}$$

由于 $\int\psi(t)\mathrm{d}t=0$，但 $\int t\psi(t)\mathrm{d}t\neq 0$，因此 $\Psi(\omega)$ 在 $\omega=0$ 处只有一阶零点。



(a)时域波形 $\psi(t)$　　(b)频域波形 $\Psi(\omega)$

图 2.8　Harr 小波

从式(2.4.9)可以看出，Harr 小波在时域上是不连续的，所以作为基本小波性能不是很好，但它的主要优点是：

(1) 计算简单；

(2) 满足正交条件：

$$\langle\psi(t),\psi(2^j t)\rangle=0$$

而且与自己的整数位移正交，即 $\langle\psi(t),\psi(t-k)\rangle=0$。

因此，在 $a=2^j$ 的分辨率系统中，Haar 小波可以构成一组最简单的正交归一的小波族。

5. 样条小波族

B 样条小波建立在中心 B 样条的基础上。所谓"基数样条空间"是指具有等距单节点的多项式样条函数空间。一阶基数 B 样条 $B_1(t)$ 是单位区间[0,1]的特征函数：

$$B_1(t)=\begin{cases}1 & 0\leqslant t<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

而对 $n\geqslant 2$，n 阶基数 B 样条 $B_n(t)$ 用卷积递推定义：

$$B_n(t)=B_1(t)*B_{n-1}(t)=\int_0^1 B_{n-1}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

由 $B_n(t)$ 再构造小波，具体过程参见第 4 章。

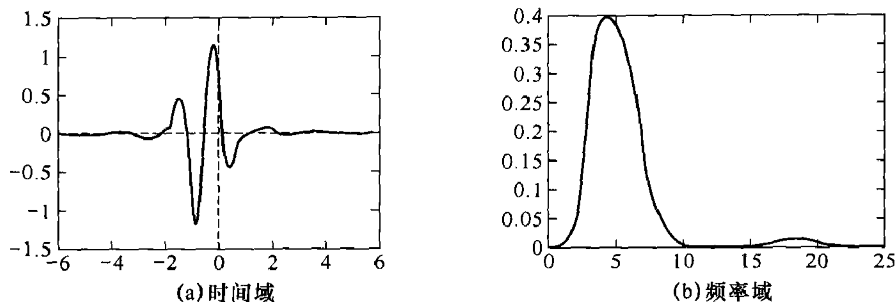


图 2.9 二阶 B 样条小波和它的频谱

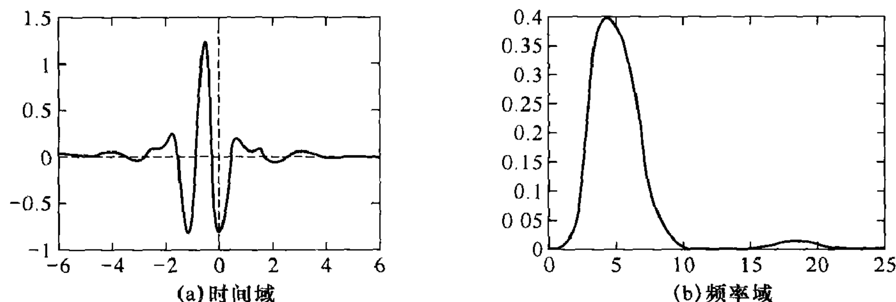


图 2.10 三阶 B 样条小波和它的频谱

2.5 小波基函数的选择

小波分析在工程应用中，一个十分重要的问题就是最优小波基的选择问题，小波基函数决定了小波变换的效果和效率，用不同的小波基分析同一个问题会产生不同的结果。目前主要通过用小波分析方法处理信号的结果与理论结果的误差来判断小波基的好坏，由此决定合适的小波基。有些情况下，也可以根据需要解决的具体问题构造小波基函数。总的来说，小波基函数的选择可以从以下 3 个方面考虑。

(1) 复值与实值小波的选择

利用复值小波对信号进行分析不仅可以得到信号的幅值信息，也可以得到信号相位信息，所以复值小波适合于分析计算信号的正常特性。而实值小波最好用来做峰值或者不连续性的检测。

(2) 连续小波的有效支撑区域的选择

$\psi(t)$、$\Psi(\omega)$的支撑区间，是指当时间或频率趋向无穷大时，$\psi(t)$、$\Psi(\omega)$从一个有限的值收敛到 0 的长度。支撑长度越长，一般需要耗费更多的计算时间，且产生更多高幅值的小波系数。连续小波基函数都是在有效支撑区域之外快速衰减，有效支撑区域越长，频率分辨率越好；有效支撑区域越短，时间分辨率越好。

(3) 对称性

具有对称性的小波，在图像处理中可以有效地避免相位畸变，因为该类小波对应的滤波器具有线性相位的特点。

（4）正则性

正则性(regularity)一般用来刻画函数的光滑程度，正则性越高，函数的光滑性越好。通常用 Lipschitz 指数 k 来表征函数的正则性。小波基的正则性主要影响着小波系数重构的稳定性，正则性好的小波，能在信号或图像的重构中获得较好的平滑效果，减小量化或舍入误差的视觉影响。但在一般情况下，正则性好，支撑长度就长，计算时间也就越长。因此，在二者之间要进行权衡。

（5）相似性

如果进行信号检测，则应尽量选择与信号波形相近似的小波。这里的相似不是绝对的相等或非常的接近，只是表示一种趋势。傅里叶系数代表了各次谐波分量在函数中的权重，这一权重实质上表明了各次谐波和这一函数的相似性；而小波分析是利用小波的窗函数来分段逼近，小波系数的大小也反映了小波和函数某段的相似程度。同时函数和小波的规则性均表示着各自的可微性和平滑程度，这样按相似性，可以用平滑的小波，即正则性系数大的小波来表示平滑的函数，用不平滑的小波，即正则性系数小的小波来表示非平滑的函数。

第3章 离散小波变换

所谓离散小波变换(Discrete Wavelet Transform,DWT)是指对尺度因子 a 和时移因子 τ 的离散化,而不是通常意义下的对时间 t 的离散化。引入离散小波变换的概念的原因有二:其一,在实际应用中,特别是利用计算机进行数字处理时,必须对连续小波进行离散化。其二,由连续小波变换的概念可知,在连续变化的尺度 a 及时间 τ 值下,小波基函数 $\psi_{a,\tau}(t)$ 具有很大的相关性,体现在不同点上的 CWT 系数满足重建核方程。要使各点小波变换之间没有相关,需要在函数族 $\psi_{a,\tau}(t)$ 中寻找相互正交的基函数。通过将小波基函数 $\psi_{a,\tau}(t)$ 中的参数 a 和 τ 的离散化,以期能够找到相互正交的基函数。

3.1 尺度与位移的离散化与离散小波变换

尺度因子 a 的离散化,取 $a=a_0^j$, $j=0,\pm1,\pm2,\cdots$,此时相应的小波函数是 $a_0^{-\frac{j}{2}}\psi[a_0^{-j}(t-\tau)]$, $j=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

时移因子 τ 的离散化,先考虑 $j=0$ 时情形:此时小波函数为 $\psi(t-\tau)$,应存在一个适合的位移量 τ_0,使得 $\psi(t-k\tau_0)$, $k=0,\pm1,\cdots$,能覆盖整个时间轴且信息不会丢失。那么,对于其他尺度 j(尺度 a_0^j 简称为尺度 j)下的小波函数 $a_0^{-\frac{j}{2}}\psi[a_0^{-j}(t-\tau)]$来讲,它在时间轴上的宽度是 $\psi(t)$的 a_0^j 倍,因此,在时间轴上的位移量也应是 $\psi(t)$的位移量 τ_0 的 a_0^j 倍。所以,当尺度因子 $a=a_0^j$, $j=0,\pm1,\pm2,\cdots$时,时移因子应取 $\tau=a^j\tau_0$。即离散化后的小波函数为

$$a_0^{-\frac{j}{2}}\psi[a_0^{-j}(t-ka^j\tau_0)]=a_0^{-\frac{j}{2}}\psi(a_0^{-j}t-k\tau_0),\ j,k\in\mathbf{Z} \tag{3.1.1}$$

调整时间轴使 $k\tau_0$ 在轴上为整数(归一化)k,于是,离散化后的小波函数为

$$\psi_{j,k}(t)=a_0^{-\frac{j}{2}}\psi(a_0^{-j}t-k),\ j、k\in\mathbf{Z} \tag{3.1.2}$$

以式(3.1.2)的小波函数为"基"进行小波变换就得到离散小波变换。于是有以下定义:

定义 3.1.1 设 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$, $a_0>0$ 是常数, $\psi_{j,k}(t)=a_0^{-\frac{j}{2}}\psi(a_0^{-j}t-k)$, $j、k\in\mathbf{Z}$,则称

$$\mathrm{WT}_f(j,k)=\int_{\mathbf{R}}f(t)\psi_{j,k}(t)\mathrm{d}t \tag{3.1.3}$$

为 $f(t)$的离散小波变换。

离散小波变换是尺度—位移相平面的规则分布的离散点上的函数,与连续小波变换相比,少了许多点上的值,因此,自然就会引起如下两个问题:

(1) 离散小波变换 $\mathrm{WT}_f(j,k)$是否包含了函数 $f(t)$的全部信息,或者说,能不能由

$WT_f(j,k)$重构原函数 $f(t)$；

(2) 是否任意函数 $f(t)$ 都可以以 $\psi_{j,k}(t)$ 为"基"表示出来，即 $f(t)=\sum_{j,k\in\mathbf{Z}}C_{j,k}\psi_{j,k}(t)$，如果可以，$C_{j,k}$ 是什么？

下面我们将会看到，这两个问题的答案是统一的，都与框架有关。

3.2　小波框架与 Reisz 基

函数空间的框架是函数空间"基"的一个推广概念，若这种"基"还是由小波函数构成，则它就称为小波框架。

第 1 章中介绍了框架的概念。设 H 为一 Hilbert 空间，$\{\psi_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$为 H 中的一个函数序列，若对于任意 $f\in H$，存在 $0<A<B<\infty$，使得

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\langle f,\psi_j\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2$$

则称$\{\psi_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$为一个框架，其中 A、B 分别称为框架的上、下界。当 $A=B$ 时，称此框架为一紧框架。将框架的概念应用到小波分析，可以得到小波框架。

定义 3.2.1　设 $\psi(t)$是基本小波函数，$\psi_{j,k}(t)=a_0^{-\frac{j}{2}}\psi(a_0^{\ j}t-k)$，$j$、$k\in\mathbf{Z}$，若对于任何 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，有

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{j,k}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2,0<A\leqslant B<+\infty \tag{3.2.1}$$

则称$\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$构成了一个小波框架。

若$\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$还是线性无关的，即当$\sum_{j,k\in\mathbf{Z}}C_{j,k}\psi_{j,k}(t)=0$时，必有 $C_{j,k}=0$，则称$\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$为 Reisz 基。

至此，我们来讨论 3.1 节提出的两个问题。

事实上，若问题(1)成立，则问题(2)肯定成立。假定问题(1)成立，即对于 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，可由 $WT_f(j,k)=\langle f,\psi_{j,k}(t)\rangle$重构 $f(t)$，有

$$f(t)=\sum_{j,k}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\tilde{\psi}_{j,k} \tag{3.2.2}$$

其中 $\tilde{\psi}_{j,k}(t)$ 是 $\psi_{j,k}(t)$ 的对偶，它也是某小波 $\tilde{\psi}(t)$ 的伸缩平移系，则对任何 $g(t)\in L^2(\mathbf{R})$，有

$$\begin{aligned}\langle g,f\rangle&=\overline{\langle f,g\rangle}=\overline{\langle\sum_{j,k}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\tilde{\psi}_{j,k},g\rangle}\\&=\sum_{j,k}\overline{\langle f,\psi_{j,k}\rangle}\,\overline{\langle\tilde{\psi}_{j,k},g\rangle}=\sum_{j,k}\langle g,\tilde{\psi}_{j,k}\rangle\langle\psi_{j,k},f\rangle\\&=\langle\sum_{j,k}\langle g,\tilde{\psi}_{j,k}\rangle\psi_{j,k},f\rangle\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

于是有

$$g=\sum_{j,k}\langle g,\tilde{\psi}_{j,k}\rangle\psi_{j,k} \tag{3.2.4}$$

式(3.2.4)说明，任意 $g(t)\in L^2(\mathbf{R})$，可由 $\psi_{j,k}(t)$线性表示出，这即是问题(2)成立。因

此，对于上两个问题，只需讨论问题(1)即可。

由直观就可知，对于不加限制的尺度间隔 a_0、时间间隔 k 所得到的小波函数 $\psi_{j,k}(t)$，相应的离散小波变换 $WT_f(j,k)$ 不一定包含了 $f(t)$ 的所有信息，此时，由 $WT_f(j,k)$ 就不一定能重构 $f(t)$。因此，要想由离散小波变换 $WT_f(j,k)$ 重构 $f(t)$，就需要对 $\psi_{j,k}(t)$ 有所限制，而满足小波框架定义式(3.2.1)就是对 $\psi_{j,k}(t)$ 的一种限制。下面具体讨论离散小波的重构问题。

3.3　离散小波的逆变换与重建核

对满足小波框架条件的离散小波变换 $WT_f(j,k)=\langle f(t),\psi_{j,k}(t)\rangle$，$f(t)$ 的重构问题如下。

(1) 当 $A=B=1$ 时，有

$$f(t)=\sum_{j,k}WT_f(j,k)\psi_{j,k}(t) \tag{3.3.1}$$

事实上，此时式(3.2.1)变成

$$\|f\|^2=\sum_{j,k}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2 \tag{3.3.2}$$

$\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的标准正交基，所以

$$f(t)=\sum_{j,k}C_{j,k}\psi_{j,k}(t) \tag{3.3.3}$$

$$\langle f,\psi_{m,n}\rangle=\sum_{j,k}C_{j,k}\langle\psi_{j,k},\psi_{m,n}\rangle \tag{3.3.4}$$

由于当 $(j,k)\neq(m,n)$ 时，$\langle\psi_{j,k},\psi_{m,n}\rangle=0$，所以

$$C_{m,n}=\langle f,\psi_{m,n}\rangle,m,n\in\mathbf{Z} \tag{3.3.5}$$

于是有

$$f(t)=\sum_{j,k}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k}(t) \tag{3.3.6}$$

$A=B=1$ 时，小波框架是小波正交基。

(2) 当 $A=B\neq1$ 时，有

$$f(t)=A^{-1}\sum_{j,k}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k} \tag{3.3.7}$$

(3) 当 $A\neq B$，但 $\varepsilon=\frac{B}{A}-1\ll1$ 时，则有

$$f(t)=\frac{2}{A+B}\sum_{j,k}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k}(t)+r \tag{3.3.8}$$

其中 r 是 $\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\|f\|$ 阶的。

这种框架为几乎紧框架。

(4) 当 $A\neq B$，也不是几乎紧框架时，有

$$f(t)=\sum_{j,k}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\tilde{\psi}_{j,k}(t) \tag{3.3.9}$$

其中，$\tilde{\psi}_{j,k}$是$\psi_{j,k}$的对偶小波。

下面我们来说明式(3.3.9)。

当$A\neq B$时，$\sum\limits_{j,k}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k}(t)$就不能保证与$f(t)$相等，记$g(t)=\sum\limits_{j,k}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k}(t)=Ff(t)$，则

$$\begin{aligned}f(t)&=F^{-1}g(t)=F^{-1}\sum_{j,k}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k}(t)\\&=\sum_{j,k}\langle f,\psi_{j,k}\rangle F^{-1}\psi_{j,k}(t)\end{aligned}$$

又记$F^{-1}\psi_{j,k}(t)=\tilde{\psi}_{j,k}(t)$，则

$$f(t)=\sum_{j,k}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\tilde{\psi}_{j,k}(t)$$

若$\tilde{\psi}_{j,k}(t)$是$\tilde{\psi}(t)$的伸缩平移：

$$\tilde{\psi}_{j,k}(t)=a_0^{-\frac{j}{2}}\tilde{\psi}(a_0^{-j}t-k)\tag{3.3.10}$$

则式(3.3.9)成立。

上面 4 条说明了在各种情况下由小波框架表示函数或由框架对应的离散小波变换重构函数的公式，其中式(3.3.9)是最一般情形的表达式，但它们不能直接应用，需要首先寻求$\psi_{j,k}(t)$的对偶小波$\tilde{\psi}_{j,k}(t)$。有关对偶小波的内容比较复杂，在此只给出如下结论。

定理 3.1　设$\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$是界为$A,B$的小波框架，记$Ff=\sum\limits_{j,k}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k}(t)$，则$\psi_{j,k}(t)$的对偶小波$\tilde{\psi}_{j,k}(t)=F^{-1}\psi_{j,k}(t)$也构成一个框架，且

$$B^{-1}\|f\|^2\leqslant\sum_{j,k}|\langle f,\tilde{\psi}_{j,k}\rangle|^2\leqslant A^{-1}\|f\|^2\tag{3.3.11}$$

一般情况下小波框架$\psi_{j,k}(t)$并不正交，甚至还可能线性相关。因此，框架所对应的离散小波变换所含信息是冗余的。从下述表述中可更清楚地看到这一点。在紧框架下：

$$f(t)=\frac{1}{A}\sum_{j,k}\mathrm{WT}_f(j,k)\psi_{j,k}(t)\tag{3.3.12}$$

而在(j_0,k_0)处的离散小波变换为

$$\begin{aligned}\mathrm{WT}_f(j_0,k_0)&=\int_{\mathbf{R}}f(t)\bar{\psi}_{j_0,k_0}(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{A}\left[\sum_{j,k}\mathrm{WT}_f(j,k)\psi_{j,k}(t)\right]\bar{\psi}_{j_0,k_0}(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{A}\sum_{j,k}\mathrm{WT}_f(j,k)\int_{\mathbf{R}}\psi_{j,k}(t)\bar{\psi}_{j_0,k_0}(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{A}\sum_{j,k}\mathrm{WT}_f(j,k)k_\psi(j,k,j_0,k_0)\end{aligned}\tag{3.3.13}$$

其中

$$K_\psi(j,k,j_0,k_0)=\int_{\mathbf{R}}\psi_{j,k}(t)\bar{\psi}_{j_0,k_0}(t)\mathrm{d}t\tag{3.3.14}$$

和连续小波变换的情况类似，式(3.3.13)表明了(j_0,k_0)处的小波变换与其他离散点(j,k)处的小波变换的关系，它由周围其他点的小波变换“线性表出”，而这个“周围”由式

(3.3.14)所确定,使得 $k_\psi(j,k,j_0,k_0)$不为零的所有的点(j,k)上的小波变换都对(j_0,k_0)点处的小波变换作“贡献”,称这里的 k_ψ 为离散小波变换的再生核。

3.4 二进小波变换及其逆变换

二进小波介于连续小波和离散小波之间,它只是对尺度因子进行了离散化,而在时间域上的时移因子仍保持连续变化,因此二进小波变换仍具有连续小波变换的时移不变性,这是它较之离散小波变换所具有的独特优点。也正因为此,它在奇异性检测、图像处理方面有重要的作用。二进小波一般采用卷积型小波变换进行定义。

3.4.1 卷积型的小波变换

对于小波变换的定义,前面介绍的都是内积型的定义 $WT_f(a,\tau)=\langle f(t),\psi_{a,t}(t)\rangle$(有的参考书上也称为相关型定义)。另外一种定义是卷积型的小波:

$$WT_f(s,\tau) = f(\tau) * \psi_s(\tau) = \frac{1}{s}\int_{\mathbf{R}} f(t)\psi\left(\frac{\tau-t}{s}\right)\mathrm{d}t$$

其中,$\psi_s(t)=\frac{1}{s}\psi\left(\frac{t}{s}\right)$ 。在卷积定义中,比例系数是$\frac{1}{s}$(而内积型定义的比例系数为$\frac{1}{\sqrt{s}}$),而且用卷积代替了内积,但是卷积型定义与内积型定义之间实质上是等效的,可以相互转换。只要取 $h(t)=\frac{t}{\sqrt{s}}\overline{\psi}(-t)$,就可以得到内积型定义,即:

$$f(\tau) * \psi_s(\tau) = \frac{1}{\sqrt{s}}\int_{\mathbf{R}} f(t)\,\frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{\tau-t}{s}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{s}}\int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{h}\left(\frac{t-\tau}{s}\right)\mathrm{d}t = \langle f(t),h_{s,\tau}(t)\rangle$$

3.4.2 二进小波变换

对于尺度及平移均离散变换的小波序列,若取离散栅格的 $a_0=2$,$\Delta\tau=0$,即相当于连续小波只在尺度上进行了二进制离散 $a=2^j$,而位移仍取连续变化,称这类小波为二进小波,表示为

$$\psi_{2^k,\tau}(t)=2^{-\frac{k}{2}}\psi\left(\frac{t-\tau}{2^k}\right) \tag{3.4.1}$$

在讨论二进小波变换及逆变换公式时,我们仍借用离散小波框架理论对其进行分析。

定义 3.4.1 设 $f(t),\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$,$\psi(t)$的傅里叶变换为 $\Psi(\omega)$,称

$$WT_f(2^j,\tau)= f * \psi_{2^j,\tau}(t) = \frac{1}{2^j}\int_{\mathbf{R}} f(t)\,\psi\left(\frac{\tau-t}{2^j}\right)\mathrm{d}t \tag{3.4.2}$$

为 $f(t)$的二进小波变换。

如果 $f(t)$的二进小波变换 $WT_f(2^j,\tau)$能重构 $f(t)$,应该对 $\Psi(\omega)$有某些限制。

定义 3.4.2 若存在常数 $0<A\leqslant B<+\infty$,使

$$A\leqslant \sum_{j\in \mathbf{Z}} |\Psi(2^j\omega)|^2 \leqslant B \tag{3.4.3}$$

则称式(3.4.2)定义的小波变换为稳定的,式(3.4.3)称为稳定性条件;若 $A=B$,则称为最稳定条件。

下面可以看到,式(3.4.3)是保证由二进小波变换 $\mathrm{WT}_f(2^j,\tau)$可以重构 $f(t)$的条件,而满足式(3.4.2)的函数 $\psi(t)$的是容许小波。

3.4.3 二进小波变换的逆变换

二进小波变换的逆变换也需要借助框架的概念。

定理 3.2 若 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$满足式(3.4.3),则二进小波变换 $\mathrm{WT}_f(2^j,\tau)=\langle f,\psi_{2^j},\tau(t)\rangle$满足:

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{j\in\mathbf{Z}}\|\mathrm{WT}_f(2^j,\tau)\|^2\leqslant B\|f\|^2,f\in L^2(\mathbf{R})\tag{3.4.4}$$

由框架定义知$\{\mathrm{WT}_f(2^j,\tau)\}_{j\in\mathbf{Z}}$构成一个小波框架,因此由它可以重构 $f(t)$。其重建公式为

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int\mathrm{WT}_f(2^j,\tau)\cdot\tilde{\psi}_{2^k,\tau}(t)\mathrm{d}\tau$$

其中,$\tilde{\psi}_{2^k,\tau}(t)$为 $\psi_{2^k,\tau}(t)$的对偶框架,其取值根据框架的不同可以分为:

(1) 当 $A=B=1$(紧框架)时,$\tilde{\psi}_{2^k,\tau}(t)=\psi_{2^k,\tau}(t)$,重构公式为:

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int\mathrm{WT}_f(2^j,\tau)\cdot\psi_{2^k,\tau}(t)\mathrm{d}\tau\tag{3.4.5}$$

(2) 当 $A=B\neq1$ 时,$\tilde{\psi}_{2^k,\tau}(t)=\frac{1}{A}\psi_{2^k,\tau}(t)$,重构公式为:

$$f(t)=\frac{1}{A}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int\mathrm{WT}_f(2^j,\tau)\cdot\psi_{2^k,\tau}(t)\mathrm{d}\tau\tag{3.4.6}$$

(3) 当 $B/A\approx1$ 时,可以取一阶近似为 $\tilde{\psi}_{2^k,\tau}(t)=\frac{2}{A+B}\psi_{2^k,\tau}(t)$　(3.4.7)

(4) 当 $B/A\gg1$ 时,可以采用高阶近似或递推方法,但比较复杂,实际应用不多。

3.4.4 二进小波变换的性质

(1) 与离散小波相同,二进小波也一定是一个允许小波,且有

$$A\ln 2\leqslant\int_{\mathbf{R}^+}\frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega\leqslant B\ln 2$$

$$A\ln 2\leqslant\int_{\mathbf{R}^+}\frac{|\Psi(-\omega)|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega\leqslant B\ln 2$$

特别是,当 A=B 时,有

$$C_\psi=\int_{\mathbf{R}^+}\frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega=A\ln 2\tag{3.4.8}$$

(2) 二进小波变换是冗余的

由框架的理论可知,当不满足 $A=B=1$ 时,框架是冗余的,即二进变换系数之间具有一定的相关性,它们之间的关系满足重建核方程。下面讨论紧框架情况下的重建核方程。

紧框架($A=B$)时,由式(3.4.5)和式(3.4.6)可知,重建公式为

$$f(t) = \frac{1}{A}\sum_{k\in \mathbf{Z}}\int \mathrm{WT}_f(2^j,\tau)\cdot \psi_{2^k,\tau}(t)\mathrm{d}\tau \tag{3.4.9}$$

由于

$$\mathrm{WT}_f(2^m,\tau_0) = f(t) * \psi_{2^j,\tau}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\int f(t)\cdot \psi\left(\frac{\tau - t}{2^j}\right)\mathrm{d}t$$

当尺度为 m，平移为 τ_0 时，小波变换系数为

$$\begin{aligned}
\mathrm{WT}_f(2^m,\tau_0) &= 2^{-\frac{m}{2}}\int f(t)\cdot \psi\left(\frac{\tau_0 - t}{2^m}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{A}2^{-\frac{m}{2}}\int\left[\sum_{k\in \mathbf{Z}}\int \mathrm{WT}_f(2^j,\tau)\cdot \psi_{2^j,\tau}(t)\mathrm{d}\tau\right]\psi\left(\frac{\tau_0 - t}{2^m}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{A2^{\frac{m}{2}}2^{\frac{j}{2}}}\int\sum_{k\in \mathbf{Z}}\int \mathrm{WT}_f(2^j,\tau)\left[\psi\left(\frac{\tau - t}{2^j}\right)\cdot \psi\left(\frac{\tau_0 - t}{2^m}\right)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{A}\sum_{k\in \mathbf{Z}}\int \mathrm{WT}_{2^j}(\tau)\cdot K_\psi(m,\tau_0;j,\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

其中

$$K_\psi = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}2^{\frac{j}{2}}}\int \psi\left(\frac{\tau - t}{2^j}\right)\cdot \psi\left(\frac{\tau_0 - t}{2^m}\right)\mathrm{d}t \tag{3.4.10}$$

此即为二进小波变换紧框架下的重建核方程。由该方程可知，并不是任意函数序列 $\{g_{2^k}(\tau)\}_{k\in \mathbf{Z}}$ 都可以作为某一函数的二进小波变换，而只有当它们满足重建核方程时，才可看做为某一函数的二进小波变换。

(3) 二进小波具有时移不变性，即若

$$f_{\tau_0}(t) = f(t-\tau_0)$$

设 $f(t)$ 的二进小波变换为 $\mathrm{WT}_f(2^m,\tau)$，$f_{\tau_0}(t)$ 的二进小波变换为 $\mathrm{WT}'_f(2^m,\tau)$，则有

$$\mathrm{WT}'_f(2^m,\tau) = \mathrm{WT}_f(2^m,\tau-\tau_0) \tag{3.4.11}$$

证明

$$\begin{aligned}
\mathrm{WT}'_f(2^m,\tau) &= f_{\tau 0}(t) * \psi_{2m},\tau(t) \\
&= 2^{-\frac{m}{2}}\int_{\mathbf{R}} f(t-\tau_0)\psi\left(\frac{\tau - t}{2^m}\right)\mathrm{d}t \\
&= 2^{\frac{m}{2}}\int_{\mathbf{R}} f(t')\psi\left[\frac{(\tau-\tau_0) - t'}{2^m}\right]\mathrm{d}t' \\
&= 2^{-\frac{m}{2}}\int_{\mathbf{R}} f(t)\,\psi\left(\frac{\tau - \tau_0 - t}{2^m}\right)\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{WT}_f(2^m,\tau-\tau_0)
\end{aligned}$$

即 $f(t)$ 平移的二进小波变换等于它的二进小波变换的平移。这个性质非常重要，在许多工程应用中有重要的实用价值。

多分辨率分析与正交小波的构造 第4章

小波变换中的伸缩参数实质上描述了观测信号的范围，也就是尺度。在图像处理中称之为分辨率。所以小波变换也可以理解为信号的多分辨率分析。多分辨率分析和时-频分析一样，是理解小波变换的基本概念。

多分辨率分析(Multi-resolution Analysis，MRA)又称为多尺度分析，是 1988 年 S. Mallat 在构造正交小波基时提出的。该理论从函数分析的角度给出了正交小波的数学解释，在空间的概念上形象地说明了小波的多分辨率特性，给出了通用的构造正交小波的方法，将之前所有的正交小波构造方法统一起来，并类似傅里叶分析中的快速傅里叶算法，给出了小波变换的快速算法——Mallat 算法，其思想又可以同多采样率滤波器组的理论结合起来，使小波在计算上变得可行。

本章将首先介绍多分辨率分析的数学理论，然后引入与小波函数 $\psi(t)$ 紧密相联的另一个分析函数——尺度函数 $\phi(t)$；通过滤波器组和函数空间分解两条途径引入多分辨率的一些直观的概念；介绍多尺度分析中的二尺度方程的简单推导及时域、频域表示方法；同时，多尺度分析也给出了 $L^2(\mathbf{R})$空间的正交分解方案，从而导出多尺度的正交小波构造算法，介绍应用比较广泛的双正交小波。最后，将一维多分辨率分析扩展到二维情况。

4.1 多分辨率分析

多分辨率分析是一种由粗到精对事物的逐级分析方法，其思想可以用照相机焦距与景物的局部与全局的关系来解释，如图 4.1 所示。用镜头观察目标 $f(t)$，小波的基函数$\psi_{a,\tau}(t)$代表镜头所起的作用。时移因子 τ 相当于使镜头相对于目标平行移动，尺度因子 a 的作用相当于镜头向目标推进或远离。

当尺度因子 a 较大时，视野宽，主要对低频成分进行分析，可以观察信号的概貌，反之，当尺度 a 较小时，视野窄，主要对高频成分进行分析，可以观察信号的细节。

形象一点说，多分辨率分析就是要构造一组函数空间，每组空间的构成都有一个统一的形式，而所有空间的闭包则逼近 $L^2(\mathbf{R})$。在每个空间中，所有的函数都构成该空间的标准化正交基，而所有的函数空间闭包中的函数则构成 $L^2(\mathbf{R})$的标准化正交基。那么，如果对信号在这类空间上进行分解，就可以得到相互正交的时频特性。而且由于空间的数目是无限可数的，可以很方便地分析我们所关心的信号的某些特性。

下面简要介绍一下多分辨率分析的数学基础。

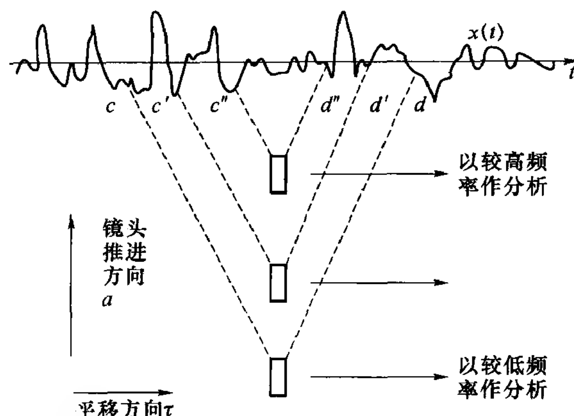


图 4.1 小波变换的粗略解释

定义 4.1.1 空间 $L^2(\mathbf{R})$中的多分辨分析是指满足如下性质的一系列闭子空间 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$。

① 一致单调性：$V_{j+1}\subset V_j$ 即，

$$\cdots V_2\subset V_1\subset V_0\subset V_{-1}\subset V_{-2}\cdots \tag{4.1.1}$$

② 上完整性：$\bigcup\limits_{m\in\mathbf{z}} V_m=L^2(\mathbf{R})$ (4.1.2)

③ 下完整性：$\bigcap\limits_{m\in\mathbf{z}} V_m=\{0\}$ (4.1.3)

④ 伸缩规则性：$f(t)\in V_j\Leftrightarrow f(2^jt)\in V_0$ (4.1.4)

⑤ 平移不变性：$f(t)\in V_0\Rightarrow f(t-k)\in V_0 \quad k\in\mathbf{Z}$ (4.1.5)

⑥ 正交基存在性：在 V_0 中存在一个正交基 ϕ，该正交基张成了 V_0，即

$$V_0=\overline{\mathrm{span}\{\phi(t-k)\}},\quad \int_{\mathbf{R}}\phi(t-k_1)\phi(t-k_2)\mathrm{d}t=\delta_{k_1,k_2} \tag{4.1.6}$$

其中正交基存在性条件可以放宽为 Rieze 基存在性，因为由 Rieze 基可以构造出一组正交基来。

若$\{\phi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$为空间 V_0 的正交基，则根据式(4.1.4)，$\phi_{j,k}(t)=2^{-\frac{j}{2}}\phi(2^{-j}t-k)$必为子空间 V_j 的标准正交基。

由多分辨率分析的定义我们可以知道，所有闭子空间$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$都是由同一个尺度函数 $\phi(t)$伸缩后的平移系列张成的尺度空间，其相互包含关系如图 4.2 所示，称 $\phi(t)$为多分辨率分析的尺度函数，V_j 称为尺度空间。

下面将进一步讨论尺度函数和尺度空间。

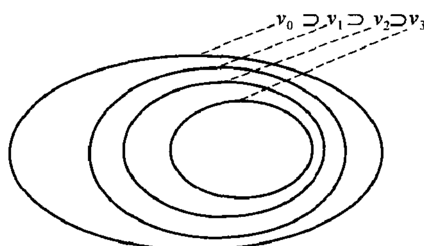


图 4.2 闭子空间$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$相互包含关系

4.2　尺度函数与尺度空间

设 $\phi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，记 $\phi_k(t)=\phi(t-k)$为其整数位移。若 $\phi_k(t)$满足

$$\langle \phi_k(t),\phi_{k'}(t)\rangle=\delta_{k,k'}\quad k,k'\in\mathbf{Z} \tag{4.2.1}$$

则称 $\phi(t)$为尺度函数。

类似于小波函数，使 $\phi(t)$在平移的同时，再进行伸缩，则得到一个尺度与位移均变化的函数系列

$$\phi_{j,k}(t)=2^{-\frac{j}{2}}\phi(2^{-j}t-k) \tag{4.2.2}$$

易知，$\phi_{j,k}(t)\in L^2(\mathbf{R})$。

在此基础上可以定义尺度空间：

$$V_j=\overline{\operatorname*{span}_k\{\phi_{j,k}(t)\}} \tag{4.2.3}$$

式(4.2.3)表示在某一固定尺度 j 上的平移函数系列 $\phi_{j,k}(t)$张成的空间，易知，$V_j\subset L^2(\mathbf{R})$，称 V_j 为尺度 j 下的尺度空间。

当 $j=0$ 时，尺度函数 $\phi_k(t)$的整数平移函数系列张成的子空间 V_0 为

$$V_0=\overline{\operatorname*{span}_k\{\phi(t-k)\}} \tag{4.2.4}$$

设 $f(t)\in V_0\subset L^2(\mathbf{R})$，根据 1.2.1 节介绍的内容，由函数序列张成的空间式(1.2.3)，则有

$$f(t)=\sum_k c_k\phi_k(t)=\sum_k c_k\phi_{0,k}(t) \tag{4.2.5}$$

同理对任意的 $f(t)\in V_j$，有

$$f(t)=\sum_k c_k\phi_{j,k}(t) \tag{4.2.6}$$

由上所述，不同尺度 j 下的尺度函数序列$\{\phi_{j,k}(t)\}$张成了不同的函数空间 V_j，随着 j 的增大及式(4.2.2)，取 $k=2^j\Delta\tau$，其实际的平移间隔 $2^j\Delta\tau$ 也随之增大，因此 V_j 空间中的线性组合就无法表示小于该尺度的细微变化。这就如人在观察某一目标，尺度 j 相当于人离目标的距离。

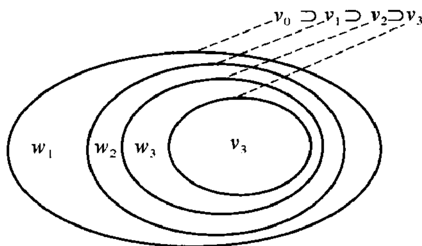
4.3　小波函数与小波空间

由以上分析可知，多分辨率分析的一系列尺度空间是由同一尺度函数在不同尺度下张成的，也即一个多分辨率分析$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$对应一个尺度函数。虽然有 $\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}V_j=L^2(\mathbf{R})$，但由式(4.1.1)知，$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$空间相互包含，不具有正交性，如图 4.2 所示。因此它们的基 $\phi_{j,k}(t)=2^{-\frac{j}{2}}\phi(2^{-j}t-k)$在不同尺度之间不具有正交性，也即$\{\phi_{j,k}(t)\}_{j\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z}}$不能作为 $L^2(\mathbf{R})$空间的正交基。

为了寻找一组 $L^2(\mathbf{R})$空间的正交基，我们定义尺度空间$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$的补空间如下：

设 W_m 为 V_m 在 V_{m-1} 中的补空间，如图 4.3 所示，即

$$V_{m-1}=V_m \oplus W_m, W_m \perp V_m \tag{4.3.1}$$



4.3 小波空间与尺度空间关系示意图

显然，任意子空间 W_m 与 W_n 是相互正交的(空间不相交)，并且 $W_m \perp W_n$，当 $m \neq n$ 且 $m,n \in \mathbf{Z}$ 时，由式(4.1.1)和式(4.1.2)知：

$$L^2(\mathbf{R})=\bigoplus_{j\in \mathbf{Z}} W_j \tag{4.3.2}$$

因此，$\{W_j\}_{j\in \mathbf{Z}}$构成了 $L^2(\mathbf{R})$的一系列正交子空间。并且，由式(4.3.1)得

$$W_0=V_{-1}-V_0$$

且

$$W_j=V_{j-1}-V_j \tag{4.3.3}$$

若 $f(t)\in W_0$，则 $f(t)\in V_{-1}-V_0$，由式(4.1.4)可得，$f(2^{-j}t)\in V_{j-1}-V_j$，也即

$$f(t)\in W_0 \Leftrightarrow f(2^{-j}t)\in W_j \tag{4.3.4}$$

若设$\{\psi_{0,k},k\in \mathbf{Z}\}$为空间 W_0 的一组正交基(W_0 的正交基可能有许多，我们取其中一组来讨论并假设 $\psi(t)$满足可容许条件)，由式(4.3.4)对所有尺度 $j\in \mathbf{Z}$，$\{\psi_{j,k}(t)=2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}t-k);k\in \mathbf{Z}\}$必为空间 W_j 的正交基。由此再根据式(4.3.3)，$\psi_{j,k}$的整个集合$\{\psi_{j,k},j\in \mathbf{Z}、k\in \mathbf{Z}\}$必然构成了 $L^2(\mathbf{R})$空间的一组正交基。

按照离散小波基的定义，此处的 $\psi_{j,k}(t)$正是由同一母函数伸缩平移得到的正交小波基。因此可称 ψ 为小波函数，相应地称 W_j 是尺度为 j 的小波空间。

由式(4.3.1)和式(4.3.3)可知，小波空间是两个相邻尺度空间的差。从图 4.2 也可看出小波空间同尺度空间的关系。

4.4 多分辨率信号分解与重建

可以从滤波器和函数空间分别引入多分辨率分析的概念。

4.4.1 由理想滤波器组引入多分辨率分析的概念

当信号的采样率满足 Nyquist 要求时，归一频带必将限制在$-\pi \sim +\pi$之间。此时可分别用理想低通与理想高通滤波器 H 与 G 将它分解成(对正频率部分而言)频带在 $0\sim\frac{\pi}{2}$的低频部分和频带在$\frac{\pi}{2}\sim\pi$ 的高频部分，分别反映信号的概貌和细节，如图 4.4 所示。因为频

带不交叠，因此处理后两路输出必定正交，而且由于两种输出的带宽均减半，因此采样率可以减半而不致引起信息的丢失。图中符号 $\downarrow 2$ 表示“二抽取”，该环节将输入序列每隔一个输出一次（例如只取偶数），组成长度缩短一半的新序列。

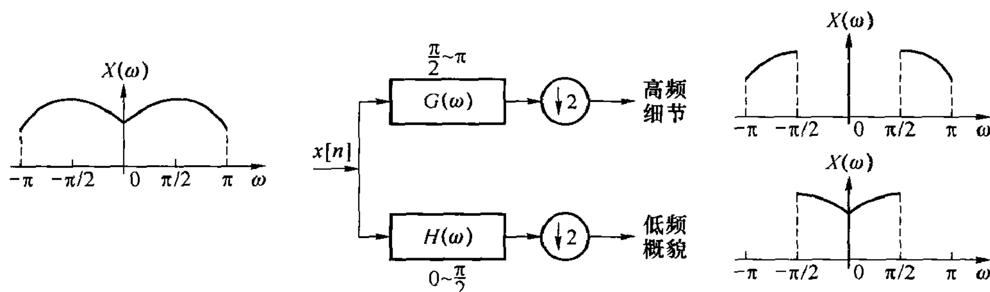


图 4.4　信号的频域分解处理示意图

对每次分解后的低频部分可利用类似的过程不断重复分解下去如图 4.5(a)所示，每一级分解把该级输入信号分解成一个低频的粗略逼近（概貌）和一个高频的细节部分。而且每级输出采样率都可以再减半。这样就将原始 $x(t)$ 进行了多分辨率分解。

由此可以引出以下概念。

1. 频率空间的剖分

如果把原始 $f(t)$ 占据的总频带（$0\sim\pi$）定义为空间 V_0，经第一级分解后 V_0 被划分成两个子空间低频的 V_1（频带 $0\sim\frac{\pi}{2}$）和高频的 W_1（频带 $\frac{\pi}{2}\sim\pi$）；经第二级分解后 V_1 又被剖分成低频的 V_2（频带 $0\sim\frac{\pi}{4}$）和高频的 W_2（频带 $\frac{\pi}{4}\sim\frac{\pi}{2}$）；如图 4.5(b)所示。这种子空间剖分过程可以记作：

$$V_0=V_1\oplus W_1,V_1=V_2\oplus W_2,\cdots,V_{j-1}=V_j\oplus W_j \tag{4.4.1}$$

其中各 W_j 是反映 V_{j-1} 空间信号细节的高频子空间，V_j 是反映 V_{j-1} 空间信号概貌的低频子空间。将式(4.4.1)依次代入，可见这些子空间之间有以下特性：

逐级包含：$V_0\supset V_1\supset V_2\supset\cdots$ 。

逐级替代：

$$V_0=W_1\oplus V_1=W_1\oplus W_2\oplus V_2=\cdots=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_j\oplus V_j \tag{4.4.2}$$

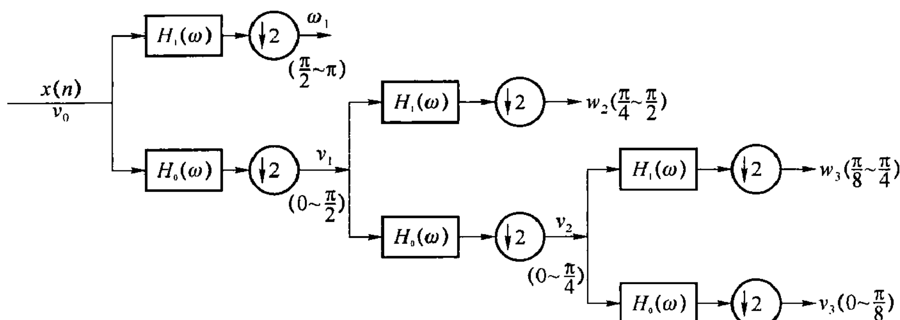
2. 各带通空间 W_j 的恒 Q 性

如图 4.5(b)所示，W_1 空间的中心频率为 $\frac{3}{4}\pi$，带宽为 $\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$；$W_2$ 空间的中心频率为 $\frac{3}{8}\pi$，较 W_1 减半，而其频带为 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，也较 W_1 减半；…。品质因数＝带宽/中心频率，可见各 W_j 的品质因数是相同的。

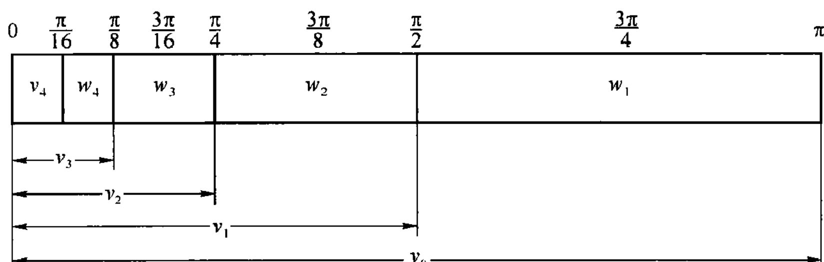
3. 各级滤波器的一致性

各级的低通滤波器 H、高通滤波器 G 是一样的。这是因为前一段输出被二抽取，而滤波器设计是根据归一频率进行的。例如，第一级 H 的真实频带是 $0\sim\frac{\pi}{2T_s}$（T_s 是输入的采样间隔），其归一频率则是 $0\sim\frac{\pi}{2}$（注：归一频率＝真实频率×采样间隔）。第二级 H 的真实频

带虽是 $0\sim\frac{\pi}{4T_s}$，但归一频率却仍是 $0\sim\frac{\pi}{2T_s}$，因为第二级输入的采样间隔是 $2T_s$，而 $\frac{\pi}{4T_s}\times 2T_s=\frac{\pi}{2}$。



(a)信号的逐级分解过程



(b)频率空间的剖分

图 4.5　频带的逐级剖分

信号经分解后可以进行重构，重构是分解的逆过程，其步骤如图 4.6 所示。每一支路首先作“二插值”，即在输入序列每两个相邻样本之间补一个零，使数据长度增加一倍，从而恢复二抽取前序列的长度。然后作相应的低通或带通滤波 H 和 G，其目的是平滑补零后的波形，也就是去掉补零后的镜像谱。从时域上看，理想滤波就是把各样本值乘以插值函数(sinc 函数)，再移位求和，以恢复原信号。在逐级重构的过程中实现了对信号由粗及精的观察。

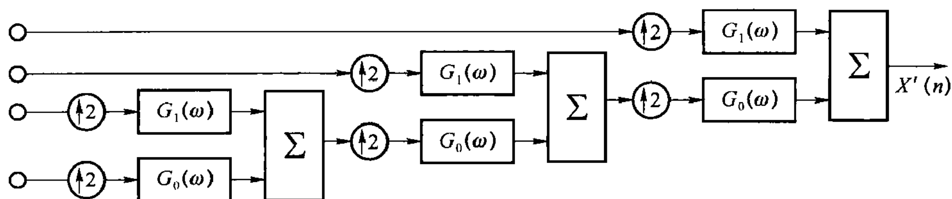


图 4.6　信号的重构

以上只是对多分辨率分析的粗略说明，目的是初步建立空间剖分概念和滤波器组框架。下一节将从函数空间剖分角度进行讨论，并和小波变换相联系，不受 H 和 G 为理想滤波器的约束。

4.4.2　从函数空间的剖分引入多分辨率分析的概念

在二分情况下，Mallat 从函数的多分辨率空间分解概念出发，在小波变换与多分辨率

分析之间建立起联系。Daubechies 把由函数空间分解引出的多分辨率分析概念和由离散序列入手的金字塔式压缩编码两种殊途同归的方法的异同作了总结，并且初步与滤波器组概念联系起来。

把平方可积的函数 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 看成是某一逐级逼近的极限情况。每级逼近都是用尺度函数 $\phi(t)$ 对 $f(t)$ 作平滑的结果，只是逐级逼近时 $\phi(t)$ 也作逐级伸缩，也就是用不同分辨率来逐级逼近待分析函数 $f(t)$，这就是“多分辨率”得名由来。更具体地说，其中包括以下概念：

函数空间的逐级剖分，出发点与上节相似，把空间作逐级二分解产生一组逐级包含的子空间：

$$\cdots,V_0=V_1\oplus W_1,V_1=V_2\oplus W_2,\cdots,V_j=V_{j+1}\oplus W_{j+1},\cdots$$

j 是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的整数，j 值越小空间越大。图 4.7 是这一剖分的示意图。

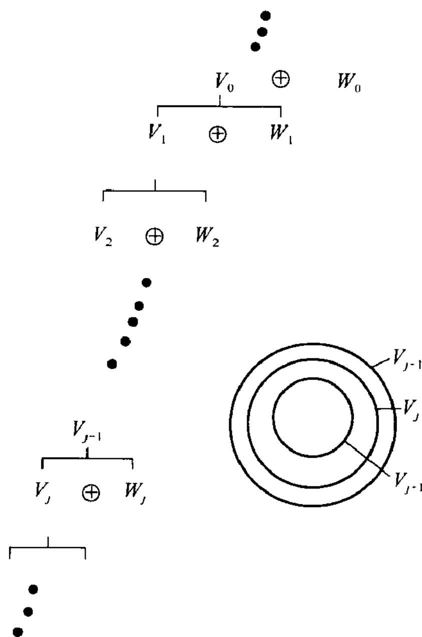


图 4.7　空间剖分示意图

而且剖分是完整的，即：

当 $j\to+\infty$ 时 $V_j\to L^2(\mathbf{R})$，包含整个平方可积的实变函数空间。在逐级包含的条件下，等效于：

$$\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}V_j=L^2(\mathbf{R}) \tag{4.4.3}$$

当 $j\to-\infty$ 时 $V_j\to\langle 0\rangle$，在逐级包含的条件下，等效于：

$$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j=\langle 0\rangle \tag{4.4.4}$$

根据

$$V_k=W_{k+1}\oplus W_{k+2}\oplus W_{k+3}\oplus\cdots=\bigoplus_{j>k}W_j$$

如果 $k\to+\infty$，则：

$$L^2(\mathbf{R})=\cdots\oplus W_{k+1}\oplus W_{k+2}\oplus W_{k+3}\oplus\cdots=\bigoplus_{j>k}W_j \tag{4.4.5}$$

这实际上是对 $L^2(\mathbf{R})$ 空间进行了正交分解。

上述剖分方式显然保证了空间 V_j 和空间 W_j 正交，且各 W_j 之间也正交：

$$V_j \perp W_j \tag{4.4.6}$$

$$W_j \perp W_{j'}, \quad j \neq j' \tag{4.4.7}$$

由于 $\{V_j\}_{j\in \mathbf{Z}}$ 满足式(4.1.4)伸缩规则性和式(4.1.5)时移不变性，因此可进一步进行剖分。

在上述基础上对各子空间内的结构作进一步分析如下。

(1) 子空间 V_0：设 V_0 中尺度函数为 $\phi(t)$；它的整数移位集合 $\langle\phi(t-k);k\in\mathbf{Z}\rangle$ 是 V_0 中的正交归一基。正交归一性可记作：

$$\langle\phi(t-k),\phi(t-k')\rangle=\delta(k-k')$$

或

$$\langle\phi_{0,k}(t),\phi_{0,k'}(t)\rangle=\delta(k-k') \tag{4.4.8}$$

式中 $\phi_{0,k}(t)$ 是 $\phi_{j,k}(t)=\frac{1}{2^{\frac{j}{2}}}\phi(2^{-j}t-k)$ 在 $j=0$ 时的形式，也就是 $\phi(t-k)$。又根据正交归一性，有：

$$\int \phi(t)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{4.4.9}$$

因此 V_0 中的任意函数必可表示为 $\langle\phi_{0,k}(t);k\in\mathbf{Z}\rangle$ 的线性组合。也就是说，设 $P_0f(t)$ 代表 $f(t)$ 在 V_0 上的投影，则必有：

$$P_0f(t)=\sum_k f_k^{(0)}\phi_{0,k}(t)$$

其中 $f_k^{(0)}$ 是线性组合的权重，其值可由如下方法求得：把上式两边对 $\phi_{0,k}(t)$ 作内积，由于式(4.4.8)的正交归一性得：

$$f_k^{(0)}=\langle P_0f(t),\phi_{0,k}(t)\rangle=\langle f(t),\phi_{0,k}(t)\rangle$$

(后一式成立是由于 $P_0f(t)$ 必与 $\phi_{0,k}(t)$ 正交)

$P_0f(t)$ 称为 $f(t)$ 在 V_0 中的平滑逼近，也就是 $f(t)$ 在分辨率 $j=0$ 下的概貌。$f_k^{(0)}$ 称为 $f(t)$ 在分辨率 $j=0$ 下的离散逼近。

(2) 子空间 V_1：如果 $\phi(t)\in V_0$，则根据二尺度伸缩性，必有 $\phi\left(\frac{t}{2}\right)\in V_1$。而且如果 $\langle\phi_{0,k}(t);k\in\mathbf{Z}\rangle$ 是 V_0 中的正交归一基，则 $[\phi_{1k}(t);k\in\mathbf{Z}]$ 是 V_1 中的正交归一基。也就是：

$$\langle\phi_{1,k}(t),\phi_{1,k'}(t)\rangle=\delta(k-k')$$

证明：$\phi_{1,k}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}-k\right)$，因此

$$\begin{aligned}\langle\phi_{1,k}(t),\phi_{1,k'}(t)\rangle &= \int\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}-k\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}-k'\right)\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{2}\int\phi\left(\frac{t}{2}-k\right)\phi\left(\frac{t}{2}-k'\right)\mathrm{d}t \qquad \left(令\ t'=\frac{t}{2}\right)\\ &=\int\phi(t'-k)\phi(t'-k')\,\mathrm{d}t'=\delta(k-k')\end{aligned}$$

因此 V_1 中的任意函数，例如 $P_1f(t)$，必可表示为 $\langle\phi_{1,k}(t);k\in\mathbf{Z}\rangle$ 的线性组合：

$$P_1 f(t) = \sum_k f_k^{(1)} \phi_{1,k}(t)$$

且权重

$$f_k^{(1)} = \langle P_1 f(t), \phi_{1,k}(t) \rangle = \langle f(t), \phi_{1,k}(t) \rangle$$

$P_1 f(t)$是$f(t)$在V_1中的平滑逼近，也就是$f(t)$在分辨率$j=1$下的概貌。$f_k^{(1)}$是$f(t)$在分辨率$j=1$下的离散逼近。

(3) 子空间W_1：如果在子空间W_0中能找到一个带通函数$\psi(t)$，其整数位移的集合$\langle \psi(t-k); k\in \mathbf{Z} \rangle$构成$W_0$中的正交归一基（由于$V_0$由$\phi_{0,k}(t)$张成，$V_1$由$\phi_{-1,k}(t)=\sqrt{2}\phi(2t-k)$张成，因此认为$W_1$中有正交归一基$\langle \psi(t-k); k\in \mathbf{Z} \rangle$是合理的），则同样根据二尺度伸缩性，必有$\psi\left(\frac{t}{2}\right)\in W_1$，且$\langle \psi_{1,k}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}-k\right); k\in \mathbf{Z} \rangle$必构成$W_1$中的一组正交归一基：

$$\langle \psi_{1,k}(t), \psi_{1,k'}(t) \rangle = \delta(k-k') \tag{4.4.10}$$

又由于$\psi(t)$是带通函数，所以

$$\int \psi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{4.4.11}$$

因此W_1中的任意函数必可表示为$\langle \psi_{1,k}(t); k\in \mathbf{Z} \rangle$的线性组合。也就是说，设$D_1 f(t)$代表$f(t)$在$W_1$中的投影，则必有

$$D_1 f(t) = \sum_k d_k^{(1)} \psi_{1,k}(t)$$

且权重

$$d_k^{(1)} = \langle D_1 f(t), \psi_{1,k}(t) \rangle = \langle f(t), \psi_{1,k}(t) \rangle \tag{4.4.12}$$

因为$V_0 = V_1 \oplus W_1$，所以有

$$P_0 f(t) = P_1 f(t) + D_1 f(t)$$

或

$$D_1 f(t) = P_0 f(t) - P_1 f(t)$$

也就是说$D_1 f(t)$是V_0，V_1两级相邻平滑逼近之差，反映这两级逼近间的细节差异。因此称$D_1 f(t)$为分辨率$j=1$下的细节函数。$d_k^{(1)}$是$j=1$下的离散细节。值得注意的是由式(4.4.12)可见$d_k^{(1)}$实际上就是离散栅格$j=1$时的小波变换$\mathrm{WT}_f(j=1,k)$。$\psi(t)$就是具有带通特性的小波函数。这样便把多分辨率分析和小波变换联系起来了。

上述讨论可以很自然地推广到V_{j-1}与V_j，W_j之间，即

$\langle \phi_{j,k}(t) = \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}}\phi(2^{-j}t-k); k\in \mathbf{Z} \rangle$必构成$V_j$中的正交归一基。

$\langle \psi_{j,k}(t) = \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}}\psi(2^{-j}t-k); k\in \mathbf{Z} \rangle$必构成$W_j$中的正交归一基。

也就是

$$\langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j,k'}(t) \rangle = \langle \psi_{j,k}(t), \psi_{j,k'}(t) \rangle = \delta(k-k') \tag{4.4.13}$$

且

$$P_{j-1} f(t) = \sum_k f_k^{(j-1)} \phi_{j-1,k}(t), \quad f_k^{(j-1)} = \langle f(t), \phi_{j-1,k}(t) \rangle \tag{4.4.14}$$

$$P_j f(t) = \sum_k f_k^{(j)} \phi_{j,k}(t), f_k^{(j)} = \langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle \tag{4.4.15}$$

$$D_j f(t) = \sum_k d_k^{(j)} \psi_{j,k}(t), d_k^{(j)} = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \tag{4.4.16}$$

又

$$P_{j-1} f(t) = P_j f(t) + D_j f(t) \tag{4.4.17}$$

$P_j f(t)$是$f(t)$在V_j中的投影，也就是$f(t)$在分辨率j下的平滑逼近，$f_k^{(j)}$是其离散逼近。$D_j f(t)$是$f(t)$在W_j中的投影，反映$P_{j-1} f(t)$，$P_j f(t)$两平滑逼近间的细节差异。而其离散值$d_k^{(j)}$就是小波变换$\mathrm{WT}_f(j,k)$。

以上就是从函数空间剖分讨论多分辨率分析的基本框架。

4.5 二尺度方程和滤波器组

4.4节中我们构造了一个空间逐级作二剖分的框架用以进行多分辨率分析。只要考察一下图4.6不难发现多分辨率分析的核心是V_0、W_0空间的正交归一基$\phi(t-k)$和$\psi(t-k)$，$k \in \mathbf{Z}$。只要它们已知，分析就可以逐级进行。而要找到这两组正交归一基，其关键是找到合适的尺度函数$\phi(t)$和小波函数$\psi(t)$。因此进一步讨论$\phi(t)$和$\psi(t)$的主要性质是非常重要的。

4.5.1 二尺度方程的简单推导及时域、频域表示方法

二尺度方程是多尺度分析赋予尺度函数$\phi(t)$和小波函数$\psi(t)$的最基本特征，它描述的是两个相邻尺度空间V_{j-1}和V_j的基函数之间的内在联系。

设$\phi(t)$和$\psi(t)$分别为尺度空间V_0和小波空间W_0的一个规范正交基函数。又由于$V_0 \subset V_{-1}$且$W_0 \subset V_{-1}$，所以$\phi(t)$和$\psi(t)$必然属于V_{-1}空间，则$\phi(t)$和$\psi(t)$可以用V_{-1}空间的规范正交基展开为

$$\phi(t) = \sum_n h[n] \phi_{-1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_n h[n] \phi(2t-n) \tag{4.5.1}$$

$$\psi(t) = \sum_n g[n] \phi_{-1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_n g[n] \phi(2t-n) \tag{4.5.2}$$

其中的系数$h[n]$和$g[n]$很容易根据内积运算得到，即

$$h[n] = \langle \phi(t), \phi_{-1,n}(t) \rangle \tag{4.5.3}$$

$$g[n] = \langle \psi(t), \phi_{-1,n}(t) \rangle \tag{4.5.4}$$

式(4.5.1)和式(4.5.2)都是描述相邻尺度空间的基函数之间的关系，因此，称为二尺度方程(或称双尺度方程)。实际上，二尺度方程关系存在于任意相邻的尺度空间，即

$$\phi_{j,0}(t) = \sum_n h[n] \phi_{j-1,n}(t) \tag{4.5.5}$$

$$\psi_{j,0}(t) = \sum_n g[n] \phi_{j-1,n}(t) \tag{4.5.6}$$

而系数$h[n]$和$g[n]$不随尺度j的变化而变化。

二尺度方程证明如下：

$$h[n]=\langle \phi_{j,0}(t),\phi_{j-1,n}(t)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}[2^{-\frac{j}{2}}\phi(2^{-j}t)][2^{-\frac{j-1}{2}}\phi^*(2^{-j+1}t-n)]\mathrm{d}t$$

$$\underline{\underline{令\ t'=t/2^j}}\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t')\phi^*(2t'-n)\mathrm{d}t'=\langle\phi(t),\phi_{-1,n}(t)\rangle \tag{4.5.7}$$

同理可证：

$$g[n]=\langle\psi_{j,0}(t),\phi_{j-1,n}(t)\rangle=\langle\psi(t),\phi_{-1,n}(t)\rangle \tag{4.5.8}$$

可以看出，$h[n]$和$g[n]$由尺度函数$\phi(t)$和小波函数$\psi(t)$决定，而与具体的尺度j无关。通常称$h[n]$和$g[n]$为滤波器系数。如果将它们的傅里叶变换定义为

$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h e^{-j\omega n} \tag{4.5.9}$$

$$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n g e^{-j\omega n} \tag{4.5.10}$$

则根据傅里叶变换的性质，二尺度方程的时域表达式(4.5.1)和式(4.5.2)有对应的频域表达式，即

$$\Phi(\omega)=H\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{4.5.11}$$

$$\Psi(\omega)=G\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{4.5.12}$$

从上述二尺度方程可以看出，滤波器系数$h[n]$和$g[n]$唯一地对应于$\phi(t)$和$\psi(t)$；从频域表达式看，$H(\omega)$和$G(\omega)$唯一地对应于$\phi(t)$和$\psi(t)$，两种表达式本质上是一样的，描述相邻两个尺度空间之间的内在联系。

注意，在式(4.5.9)和式(4.5.10)中定义的傅里叶变换与经典的傅里叶变换略有区别(只是比例系数不同)。另外，有的文献也定义傅里叶变换为

$$H(\omega)=\sum_n h e^{-j\omega n} \tag{4.5.13}$$

$$G(\omega)=\sum_n g e^{-j\omega n} \tag{4.5.14}$$

相应的二尺度方程的频域表达式就成为

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}H\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{4.5.15}$$

$$\Psi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}G\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{4.5.16}$$

4.5.2　用滤波器组进行离散信号的多分辨率分析

尺度函数之间以及尺度函数与小波函数的二尺度关系的核心就是系数$h[n]$和$g[n]$。重新考察二尺度方程式(4.5.1)和式(4.5.2)，实际上等号右边的运算就是对于n的卷积运算，而从数字信号处理角度来看，这是一种广义的数字滤波器：将$\phi_{-1,n}(t)$通过$h[n]$得到低频平滑概貌$\phi_{0,n}(t)$，因此$h[n]$称为低通滤波器；同理，$\phi_{-1,n}(t)$通过$g[n]$得到高频细节$\psi_{0,n}(t)$，因此$g[n]$称为高通滤波器。

数字滤波器$h[n]$和$g[n]$不仅描述尺度空间和小波空间基函数之间的内在联系，适用于连续信号，而且还有一个极为重要的用途：它为离散的数字信号的处理提供了快速的处理

方法。确切地说，在数字信号的多分辨率分析中（如图 4.4 所示），使用的双通道滤波器就是 $h[-n]$ 和 $g[-n]$。

在这种数字滤波器处理方案中，不是将信号 $f(t)$ 或 $f[n]$ 直接与小波函数 $\psi_{j,k}(t)$ 或者尺度函数 $\phi_{j,k}(t)$ 进行运算，而是将 $f[n]$ 通过数字滤波器 $h[n]$ 和 $g[n]$ 进行滤波处理。换句话说，$f(t)$ 与 $\psi_{j,k}(t)$ 和 $\phi_{j,k}(t)$ 的内积处理（连续信号处理）转化为等价的 $f[n]$ 与 $h[n]$ 和 $g[n]$ 的滤波处理。这就为小波信号处理提供了一个新的途径，即实际应用中，总是寻求 $\psi_{j,k}(t)$ 和 $\phi_{j,k}(t)$ 对应的数字滤波器 $h[n]$ 和 $g[n]$ 加以使用。

4.5.3 滤波器组的性质

下面简要列举滤波器组的性质。

(1) 累积特性。式(4.5.9)和式(4.5.10)中分别令 $\omega=0$，很容易证明下列结论，即

$$\sum_n h[n]=\sqrt{2} \tag{4.5.17}$$

$$\sum_n h[2n]=\sum_n h[2n+1]=\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4.5.18}$$

$$\sum_n g[n]=0 \tag{4.5.19}$$

(2) 零频特性。式(4.5.17)和式(4.5.18)实质上描述了滤波器的零频特性，其等价的频域表达式为

$$H(\omega=0)=1 \tag{4.5.20}$$

$$G(\omega=0)=0 \tag{4.5.21}$$

这也验证了 H 是低通滤波器，而 G 是高通（或带通）滤波器。

(3) 递推关系。将双尺度方程式(4.5.11)和式(4.5.12)的右端递推分解下去，就可以得到

$$\Phi(\omega)=\prod_{j=1}^{+\infty} H\left(\frac{\omega}{2^{-j}}\right) \tag{4.5.22}$$

$$\Psi(\omega)=G\left(\frac{\omega}{2}\right)\prod_{j=2}^{+\infty} H\left(\frac{\omega}{2^{-j}}\right) \tag{4.5.23}$$

式(4.5.22)和式(4.5.23)实际上也提供了一种构造小波基函数 $\psi(t)$ 和尺度函数 $\phi(t)$ 的方法。如果已知高通滤波器 $G(\omega)$ 和低通滤波器 $H(\omega)$，将其代入式(4.5.22)和式(4.5.23)就可以求出 $\Phi(\omega)$ 和 $\Psi(\omega)$，进而求出 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$。不过由于式(4.5.22)和式(4.5.23)中的无穷 $j\to+\infty$ 操作在物理上不可实现，因此，只能将尺度 j 取比较大的有限值，即

$$\Phi(\omega)\approx\prod_{j=1}^{M} H\left(\frac{\omega}{2^{-j}}\right) \tag{4.5.24}$$

$$\Psi(\omega)\approx G\left(\frac{\omega}{2}\right)\prod_{j=2}^{M} H\left(\frac{\omega}{2^{-j}}\right) \tag{4.5.25}$$

其中，$M\gg 2$。

(4) $h[n]$，$g[n]$ 的正交性。$h[n]$ 自身满足偶次平移正交性，即

$$\langle h[k-2n],h[k-2m]\rangle=\sum_{k\in\mathbf{Z}} h[k-2n]h^*[k-2m]=\delta[n-m] \tag{4.5.26}$$

同理，$g[n]$自身也同样满足偶次平移正交性，即

$$\langle g[k-2n],g[k-2m]\rangle=\sum_{k\in\mathbf{Z}}g[k-2n]g^*[k-2m]=\delta[k-m] \tag{4.5.27}$$

$h[n]$与$g[n]$之间满足偶次平移正交性，即

$$\langle h[k-2n],g[k-2m]\rangle=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h[k-2n]g^*[k-2m]=0 \tag{4.5.28}$$

(5) 滤波器频响$H(\omega)$和$G(\omega)$的特性。在实际应用中，我们更加关心的是滤波器的频率响应特性，即

$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1 \tag{4.5.29}$$

$$|G(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1 \tag{4.5.30}$$

$$H(\omega)G^*(\omega)+H(\omega+\pi)G^*(\omega+\pi)=0 \tag{4.5.31}$$

其中，式(4.5.29)～式(4.5.31)是滤波器$H(\omega)$和$G(\omega)$设计的主要依据，很多设计算法都是基于式(4.5.29)～式(4.5.31)或者其等价的z域表达式，即

$$H(z)H(z^{-1})+H(-z)H(-z^{-1})=1 \tag{4.5.32}$$

$$G(z)G(z^{-1})+G(-z)G(-z^{-1})=1 \tag{4.5.33}$$

$$H(z)G(z^{-1})+H(-z)G(-z^{-1})=0 \tag{4.5.34}$$

4.6　正交小波变换和双正交小波变换

4.6.1　正交小波变换

正交小波其核心内容是二进伸缩平移系，即

$$\psi_{m,k}(t)=2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}-k),\quad m,k\in\mathbf{Z} \tag{4.6.1}$$

必须构成$L^2(\mathbf{R})$的规范正交基。下面将从多分辨率分析的角度引入正交小波基和正交小波变换。

1. 从多分辨率分析引入正交小波变换

从多分辨率分析的讨论可知，任意给定一个多尺度分析$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$，就可以相应地得到小波基函数$\psi(t)$和一系列相互正交的小波空间$\{W_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$。

从给定的多尺度分析$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$出发，根据式(4.4.5)，将$L^2(\mathbf{R})$空间进行如下分解，即

$$L^2(\mathbf{R})=\cdots\oplus W_{-1}\oplus W_0\oplus W_1\oplus W_2\oplus\cdots=\bigoplus_{k\in\mathbf{Z}}W_k \tag{4.6.2}$$

因此，对于任何一个信号矢量$f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，分别往W_j空间投影得到细节信息$D_jf(t)$，由于W_j空间之间是正交关系，因此可以将该信号表示为

$$f(t)=\cdots+D_{-1}f(t)+D_1f(t)+D_2f(t)+\cdots \tag{4.6.3}$$

又由于在多分辨率分析中，已经知道这样的结论：$\{\psi_{j_0,k}(t)=2^{-\frac{j_0}{2}}\psi(2^{-j_0}t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$是小波空间$W_{j_0}$的规范正交基。因此，$D_{j_0}f(t)$可以表示为这一组规范正交基的线性组合，即

$$D_{j_0}f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{j_0,k}\psi_{j_0,k}(t)$$

同理，式(4.6.3) 可以写为

$$f(t)=\cdots\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{-1,k}\psi_{-1,k}(t)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{0,k}\psi_{0,k}(t)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{1,k}\psi_{1,k}(t)+\cdots$$
$$=\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{j,k}\psi_{j,k}(t) \tag{4.6.4}$$

且系数为

$$d_{j,k}=\langle f(t),\psi_{j,k}(t)\rangle \tag{4.6.5}$$

式(4.6.5)与式(3.1.3)对比可见,式(4.6.5)内积$\langle f(t),\psi_{j,k}(t)\rangle$实质上就是离散小波变换。而且由于已经知道$\{\psi_{j,k}(t)\}_{j\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z}}$是$L^2(\mathbf{R})$空间的规范正交基,因此式(4.6.5)也就是正交小波变换。相应地,式(4.6.4)就是它的重构公式,也称为正交小波分解公式,即原信号被分解为多个正交信号的代数和。

若记$d_{j,k}\psi_{j,k}(t)=g_i(t)$,则$g_i(t)\in W_j$,而$W_j\oplus V_j=V_{j-1}$,$V_j$的频率范围恰好是$V_{j-1}$的一半,且是$V_{j-1}$中的低频表现部分,所以$W_j$的频率表现在$V_j$与$V_{j-1}$之间的部分,它表现的是一个有限频带,所以通常$V_j$表现了$V_{j-1}$的“概貌”,$W_j$表现了$V_{j-1}$的“细节”。由于$W_j$的频带是互不重叠的,所以$W_j$表现的是不同频带中的“细节”。在这样的记法和理解下,式(4.6.4)可写成

$$f(t)=\sum_{j\in\mathbf{Z}}g_i(t) \tag{4.6.6}$$

它说明,任何一个函数$f(t)\in L^2(\mathbf{R})$,可以分解成不同频带的细节之和。随着j的不同,这些频带是互不相叠,且充满整个频率空间的。这样正交离散小波变换$d_{j,k}$的时-频窗是互不重叠、相互邻接的,它们形成了对时-频平面的一种剖分,如图4.8所示。

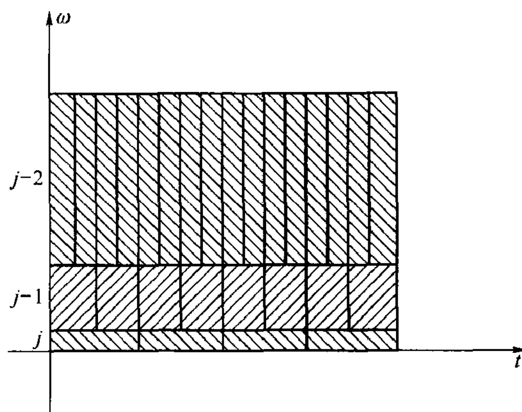


图4.8　正交小波变换的时-频窗

2. 有限精度的多尺度分析和逼近

实际上,任何实际的信号(或物理的信号)都不可能包含无限的细节,因此它只可能达到有限的精度和分辨率,也就是说,$\{W_j\}$中尺度因子j不可能无限的小,而只能达到某一个比较小的整数。我们可以假设$f(t)\in V_0$(将有最精细的细节的函数空间记为V_0)。由于

$$V_0=V_1+W_1=V_2+W_2+W_1$$
$$=\cdots$$
$$=V_j+W_j+W_{j-1}+\cdots+W_1$$

所以

$$f(t)=f_j(t)+g_j(t)+g_{j-1}(t)+\cdots+g_1(t) \tag{4.6.7}$$

即

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j,k}\phi_{j,k}(t)+\sum_{i=1}^{j}\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{i,k}\psi_{i,k}(t)\tag{4.6.8}$$

其中

$$c_{j,k}=\langle f(t),\phi_{j,k}(t)\rangle,\quad k\in\mathbf{Z}\tag{4.6.9}$$

$$d_{i,k}=\langle f(t),\psi_{i,k}(t)\rangle,\quad k\in\mathbf{Z}\tag{4.6.10}$$

式(4.6.7)中的第一项 $f_j(t)$ 是 $f(t)$ 在尺度 j 下的一种逼近，j 越大，逼近程度越差，是 $f(t)$ 的第 j 级“模糊像”，它表示的是 $f(t)$ 的频率不超过 2^{-j} 的成分；而第二项中的 $g_i(t)$，是 $f(t)$ 的频率在 2^{-i} 到 2^{-i+1} 之间的细节成分。式(4.6.8)对于所有的 $j(j\geqslant 1)$ 成立，也就是说可得到不同尺度 j 下的逼近式。我们称

$$f_j(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j,k}\phi_{j,k}(t)\tag{4.6.11}$$

为 $f(t)$ 的尺度为 j 的连续逼近，称其系数(4.6.9)为 $f(t)$ 的离散逼近，称

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{i,k}\psi_{i,k}(t)\tag{4.6.12}$$

为 $f(t)$ 的尺度 i 下(或频率 2^{-i})的连续细节，称其系数(4.6.10)为 $f(t)$ 的离散细节。

4.6.2　构造正交小波

多尺度分析除了用于函数逼近和正交分解外，另外一个重要作用就是构造正交小波基。它的基本思路是从一个选定的尺度函数出发，根据多尺度分析的理论，特别是二尺度方程，构造出所需的正交小波基函数。根据二尺度方程的表现形式不同，可以分为频域构造法和时域构造法，两种方法实质是同一种构造算法的不同表示。

1. 频域构造法

在这类构造方案中，构造的起点是尺度函数 $\phi(t)$，因此也称为正交小波基的多尺度构造方法。此方法主要遵循

$$\phi(t)\to\Phi(\omega)\to H(\omega)\to G(\omega)\to\Psi(\omega)\to\psi(t)\tag{4.6.13}$$

这样的构造顺序，具体的描述如下：

(1) 由尺度函数 $\phi(t)$ 求其频谱 $\Phi(\omega)$。

(2) 将 $\Phi(\omega)$ 代入关系式 $\Phi(2\omega)=\Phi(\omega)H(\omega)$，求出低通滤波器的频响 $H(\omega)$。

(3) 根据 $H(\omega)$ 和关系式 $G(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}H^*(\omega+\pi)$，确定高通滤波器的频响 $G(\omega)$。

(4) 将 $\Phi(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 代入二尺度方程 $\Psi(2\omega)=G(\omega)\Phi(\omega)$，求出 $\Psi(\omega)$。

(5) 由 $\Psi(\omega)$ 进行傅里叶变换得到小波母函数 $\psi(t)$。

(6) $\psi(t)$ 通过二进伸缩和平移，得到张成 $L^2(\mathbf{R})$ 空间中的正交小波基函数 $\{\psi_{j,k}=2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}t-k)\}_{j\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z}}$。

因此，只要合理地选择尺度函数 $\phi(t)$，就可以构造出很多满足我们需要的小波。理论上已经证明，用这种方法构造的小波自然满足小波允许条件式(2.1.1)。在很多参考文献中，上述步骤(3)中的关系式采用的是 $G(\omega)=\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega}H^*(\omega+\pi)$，这也是可以的。

2. 时域构造法

上述构造法之所以称为频域构造法，是因为将尺度函数转换到了频域，并利用了频域关系式 $G(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}H^*(\omega+\pi)$，其实，此关系式有等价的时域表示，即

$$G(\omega)=e^{-j\omega}H^*(\omega+\pi)\Leftrightarrow g[n]=(-1)^{1-n}h^*[1-n] \quad (4.6.14)$$

其中,$G(\omega)$,$H(\omega)$分别为$\{g[n]\}_{n\in Z}$和$\{h[n]\}_{n\in Z}$的傅里叶变换。根据式(4.6.14),上述的频域构造法还有等价的时域构造法,具体构造步骤如下:

(1) 由尺度函数 $\phi(t)$及公式$h[k]=\langle\phi,\phi_{j,k}\rangle$,求出低通滤波器系数$\{h[k]\}_{k\in Z}$。

(2) 将 $h[k]$代入关系式 $g[n]=(-1)^{1-n}h^*[1-n]$,求出高通滤波器系数$\{g[n]\}_{n\in Z}$。

(3) 由 $\phi(t)$和$\{g[n]\}_{n\in Z}$ 以及二尺度方程 $\psi(t/2)=\sqrt{2}\sum_k g[k]\phi(t-k)$,求出小波母函数 $\psi(t)$。

(4) $\psi(t)$通过二进伸缩平移得到 $L^2(\mathbf{R})$中的正交小波基函数$\{\psi_{j,k}=2^{-j/2}\psi(2^{-j}t-k)\}_{j\in Z,k\in Z}$。

简而言之,这种时域构造法遵循了下式所描述的构造流程,即

$$\phi(t)\rightarrow h[k]\rightarrow g[k]\rightarrow\psi(t) \quad (4.6.15)$$

时域构造法与频域构造法相比,本质一样但略为简单。从上面的构造方法也可以看出,正交小波基函数的构造已经转化为尺度函数的构造。

下面介绍两个构造小波的例子。

[**例 4-1**] 构造 Haar 小波,如图 4.9 所示。

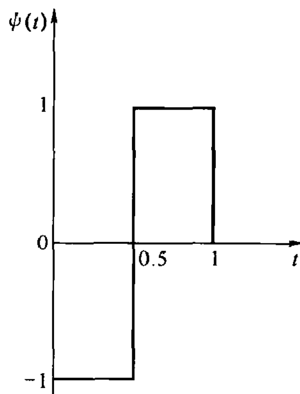


图 4.9 Haar 小波

取尺度函数

$$\phi(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,1)\\ 0, & 其他\end{cases}$$

则
$$\Phi(\omega)=\frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega}$$

$$\Phi(2\omega)=\frac{1-e^{-j2\omega}}{2j\omega}=\frac{1+e^{-j\omega}}{2}\frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega}=\frac{1+e^{-j\omega}}{2}\Phi(\omega)$$

$$H(\omega)=\frac{\Phi(2\omega)}{\Phi(\omega)}=\frac{1+e^{-j\omega}}{2}$$

取
$$G(\omega)=e^{-j\omega}\overline{H}(\omega+\pi)=\frac{e^{-j\omega}-1}{2}$$

由 $\Psi(\omega)=G\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$,可得

$$\Psi(\omega)=\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}-1}{2}\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\psi(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}-1}{2}e^{j\omega t}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(e^{j(2t-1)\frac{\omega}{2}}-e^{j2t\cdot\frac{\omega}{2}}\right)d\frac{\omega}{2}\\&=\phi(2t-1)-\phi(2t)\end{aligned}$$

即

$$\psi(t)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant t<\dfrac{1}{2}\\ 1, & \dfrac{1}{2}\leqslant t<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{4.6.16}$$

同样，也可以在时域构造 $\psi(t)$。

取 $\phi(t)$ 同前面一样，则 $\phi(t)$ 的平移系 $\{\phi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 张成子空间

$$V_0=\{f(t)\,|\,f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\phi(t-k),\{c_k\}\in l^2\}$$

由 MRA 的伸缩性质，有

$$V_1=\{g(t)\,|\,g(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_k2^{-1/2}\phi(2^{-1}t-k),\{d_k\}\in l^2\}$$

…

$$V_j=\left\{x(t)\,\middle|\,x(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}e_k2^{-j/2}\phi(2^{-j}t-k),\{e_k\}\in l^2\right\}$$

…

由二尺度方程式(4.5.3)和式(4.5.4)，有

$$h[k]=<\phi_{j,0}(t),\phi_{j-1,k}(t)>=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbf{R}}\phi\left(\frac{t}{2}\right)\overline{\phi}(t-k)\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^1 1\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & k=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_1^2 1\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & k=1\\ 0, & k\text{ 为其他整数}\end{cases}$$

取 $g[n]=(-1)^{1-n}\overline{h}[1-n],n\in\mathbf{Z}$，有

$$g[n]=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & n=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}, & n=1\\ 0, & n\text{ 为其他整数}\end{cases}$$

由式(4.5.2)，有

$$\psi(t)=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}g[n]\phi(2t-n)=-\phi(2t)+\phi(2t-1)$$

即得出 $\psi(t)$ 的表达式。

[例 4-2]　构造 Shannon 小波。

取 $\phi(t)=\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}$，则 $\phi(t)$ 的傅里叶变换为

$$\Phi(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{4.6.17}$$

由 $\Phi(2\omega)=H(\omega)\Phi(\omega)$，得

$$H(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant|\omega|<\pi\end{cases}$$

取

$$G(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\overline{H}(\omega+\pi)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}, & -\dfrac{3\pi}{2}<\omega<-\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\omega<0 \text{ 或 } -2\pi<\omega\leqslant-\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

由 $\Psi(2\omega)=G(\omega)\Phi(\omega)$，得

$$\Psi(2\omega)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}, & -\pi<\omega<-\dfrac{\pi}{2} \text{ 或 } \dfrac{\pi}{2}<\omega<\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\Psi(\omega)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/2}, & -2\pi<\omega<-\pi \text{ 或 } \pi<\omega<2\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所以

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega+\int_{2\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{\sin 2\pi\left(t-\dfrac{1}{2}\right)-\sin\pi\left(t-\dfrac{1}{2}\right)}{\pi\left(t-\dfrac{1}{2}\right)} \tag{4.6.18}$$

在上面的构造过程中，如果取 $G(\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\overline{H}(\omega+\pi)$，则可得到

$$\psi(t)=\frac{\sin 2\pi\left(t+\dfrac{1}{2}\right)-\sin\pi\left(t+\dfrac{1}{2}\right)}{\pi\left(t+\dfrac{1}{2}\right)} \tag{4.6.19}$$

由此可见，与一个尺度函数对应的小波函数并不唯一。

从这里可以看出滤波器(组) $\{h[n],g[n]\}$ 或频域形式 $\{H(\omega),G(\omega)\}$ 的重要作用。由于 $\{H(\omega),G(\omega)\}$ 是 $\{\phi(t),\psi(t)\}$ 对应的滤波器，所以 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的许多性质都可以通过 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 在频率域上反映出来。因此常常需要把同样的一个问题从两个不同的方面来考虑，一方面考虑尺度函数和小波，另一方面考虑它们对应的滤波器。

4.6.3 双正交小波

正交基和正交小波变换在数学上具有良好的性质，它使得信号的正交分解和重构都极为简单。但是数学家 Daubechies 已经证明，除了 Haar 小波以外，所有的正交基都不具备对称性。非对称会在某些应用场合引入相位失真。为了解决这个问题，可以适当放宽正交性的要求，构造双正交的小波基(正交性较弱)，使得小波基函数获得很多重要的特性，例如紧支集、对称性等。

在框架理论中，如果两个对偶的小波母函数 $\psi(t)$ 和 $\tilde{\psi}(t)$ 满足如下的双正交关系，即

$$\langle\psi_{m,n}(t),\tilde{\psi}_{j,k}(t)\rangle=\delta(m-j)\delta(n-k) \tag{4.6.20}$$

同时，其对应的尺度函数 $\tilde{\phi}_{j,k}(t)$ 满足如下关系，即

$$\langle\phi_{j,m}(t),\tilde{\phi}_{j,n}(t)\rangle=\delta(m-n) \tag{4.6.21}$$

那么，称 $\psi(t)$ 和 $\tilde{\psi}(t)$ 构成了一对正交小波基。

这里的正交性体现在 $\psi_{j,m}(t)$ 和 $\tilde{\psi}_{j,m}(t)$ 之间(称之互正交性),而 $\{\psi_{j,m}(t)\}_{j\in\mathbf{Z},m\in\mathbf{Z}}$ 或者 $\{\tilde{\psi}_{j,m}(t)\}_{j\in\mathbf{Z},m\in\mathbf{Z}}$ 本身不一定具备正交性。

有了双正交小波后,对于多分辨率分析,基函数由原来的两个函数 $\{\psi(t),\phi(t)\}$ 变成了4个函数 $\{\psi(t),\phi(t),\tilde{\psi}(t),\tilde{\phi}(t)\}$,它们构成了两个多分辨率分析,即

$$\cdots\subset V_1\subset V_0\subset V_{-1}\subset V_{-2}\subset\cdots \tag{4.6.22}$$

$$\cdots\subset\tilde{V}_1\subset\tilde{V}_0\subset\tilde{V}_{-1}\subset\tilde{V}_{-2}\subset\cdots \tag{4.6.23}$$

其中

$$V_j=\operatorname{span}\{\phi_{j,k}(t)\},\tilde{V}_j=\operatorname{span}\{\tilde{\phi}_{j,k}(t)\} \tag{4.6.24}$$

且

$$V_m\perp\tilde{W}_m,W_m\perp\tilde{V}_m \tag{4.6.25}$$

另外,$\tilde{\psi}_{j,m}(t)$ 和 $\tilde{\phi}_{j,k}(t)$ 也有对应的高通滤波器 $\tilde{g}[n]$ 和低通滤波器 $\tilde{h}[n]$,且满足二尺度方程,即

$$\tilde{\phi}(t)=\sqrt{2}\sum_k\tilde{h}[k]\tilde{\phi}(2t-k) \tag{4.6.26}$$

$$\tilde{\psi}(t)=\sqrt{2}\sum_k\tilde{g}[k]\tilde{\phi}(2t-k) \tag{4.6.27}$$

因此,$\tilde{g}[n]$、$\tilde{h}[n]$、$g[n]$、$h[n]$ 共同构成了双正交滤波器组。更重要的是,有了双正交性质后的信号分解就变成为

$$f(t)=\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\langle f(t),\tilde{\psi}_{j,k}(t)\rangle\cdot\psi_{j,n}(t) \tag{4.6.28}$$

4.7 Mallat 快速算法

4.7.1 快速算法

由4.6.1节有限精度的多尺度分析和逼近可知,信号 $f(t)$ 可以表示为

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j,k}\phi_{j,k}(t)+\sum_{i=1}^{j}\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{i,k}\psi_{i,k}(t) \tag{4.7.1}$$

其中的小波系数 $d_{j,k}$ 和尺度函数 $c_{j,k}$ 分别为

$$d_{j,k}=\langle f(t),\psi_{j,k}(t)\rangle \tag{4.7.2}$$

$$c_{j,k}=\langle f(t),\phi_{j,k}(t)\rangle \tag{4.7.3}$$

当 $\phi(t)$,$\psi(t)$ 已确定时,要想得到函数 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 的多尺度函数 $f_j(t)$,只需知道 $\{c_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 即可,同样,要想得到 $f(t)$ 在尺度 j 下的细节,只需知道 $\{d_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$,这也是我们将它们称为离散逼近和离散细节的原因。在多尺度分解过程中,总是从空间 V_{j-1} 分解得到两个子空间 V_j 和 W_j,这是一种递推的逐级分解。很自然就会猜想,函数 $f(t)$ 在 V_{j-1} 空间的投影系数 $c_{j-1,k}$ 是否可以直接分解得出 $f(t)$ 在 V_j 和 W_j 空间的投影系数 $c_{j,k}$ 和 $d_{j,k}$ 呢?事实上,这种系数之间的逐级推导关系是存在的。$\{c_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 与 $\{d_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 的计算对于 j 有传

递关系，即

$$c_{j,k}=\sum_{n\in\mathbf{Z}}h[n-2k]c_{j-1,n} \tag{4.7.4}$$

$$d_{j,k}=\sum_{n\in\mathbf{Z}}g[n-2k]c_{j-1,n} \tag{4.7.5}$$

上述递推公式的简要证明如下：先考虑 $c_{1,k}$ 与 $\{c_{0,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 的关系，由于 $V_0=V_1+W_1$，$f_0(t)=f_1(t)+g_1(t)$，$\phi\left(\frac{t}{2}\right)=\sqrt{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h[k]\phi(t-k)$，所以

$$\begin{aligned}c_{1,k}&=\langle f(t),\phi_{1,k}(t)\rangle\\&=\langle f_1(t),\phi_{1,k}(t)\rangle+\langle g_1(t),\phi_{1,k}(t)\rangle\\&=\langle f_0(t),\phi_{1,k}(t)\rangle\\&=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{0,k}\langle\phi_{0,n}(t),\phi_{1,k}(t)\rangle\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\phi_{1,k}(t)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}-k\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\sum_{l\in\mathbf{Z}}h[l]\phi(t-2k-l)\\&=\sum_{m\in\mathbf{Z}}h[m-2k]\phi(t-m),2k+l=m\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}c_{1,k}&=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{0,n}\langle\phi(t-n),\sum_{m\in\mathbf{Z}}h[m-2k]\phi(t-m)\rangle\\&=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{0,n}\langle\phi(t-n),h[n-2k]\phi(t-n)\rangle\\&=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{0,n}\overline{h}[n-2k],\quad k\in\mathbf{Z}\end{aligned}$$

再看 $c_{j+1,k}$ 与 $\{c_{j,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 的关系，由于 $V_j=W_{j+1}+V_{j+1}$，$f_j(t)=f_{j+1}(t)+g_{j+1}(t)$，所以有

$$\begin{aligned}c_{j+1,k}&=\langle f(t),\phi_{j+1,}(t)\rangle\\&=\langle f_{j+1}(t),\phi_{j+1,k}(t)\rangle+\langle g_{j+1}(t),\phi_{j+1,k}(t)\rangle\\&=\langle f_j(t),\phi_{j+1,k}(t)\rangle\\&=\langle\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{j,n}\phi_{j,n}(t),\phi_{j+1,k}(t)\rangle\\&=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{j,n}\langle\phi_{j,n}(t),\phi_{j+1,k}(t)\rangle\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&\langle\phi_{j,n}(t),\phi_{j+1,k}(t)\rangle\\&=\langle 2^{-\frac{j}{2}}\phi(2^{-j}t-n),2^{-\frac{j+1}{2}}\phi(2^{-j-1}t-k)\rangle\\&=2^{-j-\frac{1}{2}}\langle\phi\left(\frac{t}{2^j}-n\right),\phi\left(\frac{t}{2^{j+1}}-k\right)\rangle\end{aligned}$$

由双尺度方程

$$\phi\left(\frac{t}{2^{j+1}}-k\right)=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\sqrt{2}h[l]\phi\left(\frac{t}{2^j}-2k-l\right)$$
$$=\sqrt{2}\sum_{m\in\mathbf{Z}}h[m-2k]\phi\left(\frac{t}{2^j}-m\right)$$

所以

$$\begin{aligned}&\langle\phi_{j,n}(t),\phi_{j+1,k}(t)\rangle\\&=2^{-j}\langle\phi\left(\frac{t}{2^j}-n\right),\sum_{m\in\mathbf{Z}}h[m-2k]\phi\left(\frac{t}{2^j}-m\right)\rangle\\&=2^{-j}\langle\phi\left(\frac{t}{2^j}-n\right),h[n-2k]\phi\left(\frac{t}{2^j}-n\right)\rangle\\&=\bar{h}[n-2k]\end{aligned}\tag{4.7.6}$$

从而有
$$c_{j+1,k}=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{j,n}\bar{h}[n-2k],\quad k\in\mathbf{Z}\tag{4.7.7}$$

同理有
$$d_{j+1,k}=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{j,n}\bar{g}[n-2k],\quad k\in\mathbf{Z}\tag{4.7.8}$$

式(4.7.7)和式(4.7.8)便是 Mallat 快速算法。从两式中可看出，只要知道双尺度方程中的传递系数$\{h[n]\}_{n\in\mathbf{Z}}$和$\{g[n]\}_{n\in\mathbf{Z}}$($g[n]=(-1)^{1-n}\bar{h}[1-n]$)，就可由$\{c_{0,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$计算出$\{c_{1,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$，$\{d_{1,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$，再由$\{c_{1,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$计算出$\{c_{2,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$，$\{d_{2,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$，由$\{c_{2,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$计算出$\{c_{3,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$，$\{d_{3,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$，…，其过程如图 4.10 所示。

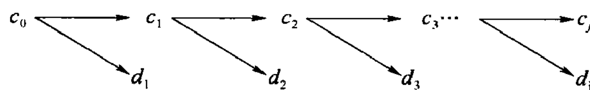


图 4.10　分解算法示意图

以上是快速分解公式。下面我们说明，由$\{c_{j+1,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$和$\{d_{j+1,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$可以重构出$\{c_{j,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$的快速算法。

$$\begin{aligned}c_{j,k}&=\langle f(t),\phi_{j,k}(t)\rangle\\&=\langle f_j(t),\phi_{j,k}(t)\rangle\\&=\langle f_{j+1}(t)+g_{j+1}(t),\phi_{j,k}(t)\rangle\\&=\langle f_{j+1}(t),\phi_{j,k}(t)\rangle+\langle g_{j+1}(t),\phi_{j,k}(t)\rangle\end{aligned}\tag{4.7.9}$$

其中

$$\begin{aligned}&\langle f_{j+1}(t),\phi_{j,k}(t)\rangle\\&=\langle\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{j+1,n}\phi_{j+1,n}(t),\phi_{j,k}(t)\rangle\\&=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{j+1,n}\langle\phi_{j+1,n}(t),\phi_{j,k}(t)\rangle\\&=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{j+1,n}\overline{\phi_{j+1,n}(t),\phi_{j,k}(t)}\end{aligned}$$

由式(4.7.6)知

$$\langle\phi_{j,k}(t),\phi_{j+1,n}(t)\rangle=\bar{h}[k-2n]$$

所以

$$\langle f_{j+1}(t),\phi_{j,k}(t)\rangle=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{j+1,n}h[k-2n]\tag{4.7.10}$$

再看式(4.7.9) 中的第 2 项

$$\begin{aligned}&\langle g_{j+1}(t),\phi_{j,k}(t)\rangle\\&=\langle\sum_{n\in\mathbf{Z}}d_{j+1,n}\psi_{j+1,n}(t),\phi_{j,k}(t)\rangle\\&=\sum_{n\in\mathbf{Z}}d_{j+1,n}\langle\psi_{j+1,n}(t),\phi_{j,k}(t)\rangle\end{aligned}\tag{4.7.11}$$

由关于 $\psi(t)$ 的双尺度方程知

$$\begin{aligned}&\langle\psi_{j+1,n}(t),\phi_{j,k}(t)\rangle\\&=\langle 2^{-\frac{j+1}{2}}\psi\left(\frac{t}{2^{j+1}}-n\right),2^{-\frac{j}{2}}\phi\left(\frac{t}{2^j}-k\right)\rangle\\&=2^{-j-\frac{1}{2}}\langle\psi\left(\frac{t}{2^{j+1}}-n\right),\phi\left(\frac{t}{2^j}-k\right)\rangle\\&=2^{-j-\frac{1}{2}}\langle\sum_{l\in\mathbf{Z}}\sqrt{2}\cdot g[l]\phi\left(\frac{t}{2^j}-2n-l\right),\phi\left(\frac{t}{2^j}-k\right)\rangle\\&=2^{-j}\sum_{m\in\mathbf{Z}}g[m-2n]\langle\phi\left(\frac{t}{2^j}-m\right),\phi\left(\frac{t}{2^j}-k\right)\rangle\\&=2^{-j}g[k-2n]\langle\phi\left(\frac{t}{2^j}-k\right),\phi\left(\frac{t}{2^j}-k\right)\rangle\\&=g[k-2n]\end{aligned}$$

代入式(4.7.11)得

$$\langle g_{j+1,n}(t),\phi_{j,k}(t)\rangle=\sum_{n\in\mathbf{Z}}d_{j+1,n}g[k-2n]\tag{4.7.12}$$

将式(4.7.10)、式(4.7.12)代入式(4.7.9),得到

$$c_{j,k}=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{j+1,n}h[k-2n]+\sum_{n\in\mathbf{Z}}d_{j+1,n}g[k-2n],\quad k\in\mathbf{Z}\tag{4.7.13}$$

此即是由 $\{c_{j+1,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$,$\{d_{j+1,n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 重构 $\{c_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 的重构公式,如图 4.11 所示。

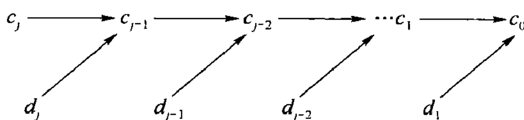


图 4.11 重构算法示意图

4.7.2 函数数值形式的多尺度分解和重构

在实际中,一个函数往往只有数值形式 $\{f(k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$,当没有其他信息时,这个序列就是 $f(t)$ 的最精细的数值逼近。可以认为 $\{f(k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 $f(t)$ 在某尺度空间 V_j 中的投影,不妨设这个尺度空间为 V_0,则

$$f_0(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{0,k}\phi_{0,k}(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{0,k}\phi(t-k)$$

从 4.7.1 节中的系数分解策略中可以看到,分解的起点是系数 $c_{0,k}$,理论上 $c_{0,k}$ 应该根据式(4.7.14)来求取,即

$$c_{0,k}=\langle f(t),\phi_{0,k}(t)\rangle=\langle f(t),\phi(t)\rangle\tag{4.7.14}$$

但是在实际应用中,往往都是直接将连续信号 $f(t)$ 在满足香农定理时进行数字采样得到的序列 $f(k)$ 作为 $c_{0,k}$ 的近似表示,由于当采样间隔充分小时,$\tau(t-k)$ 类似于 $\delta(t-k)$ 的表现。所以在尺度为 0 时,可取

$$c_{0,k}=f(k),\quad k\in\mathbf{Z} \tag{4.7.15}$$

于是，$f(t)$在V_j中的表达式，即在尺度j下的逼近式为

$$\begin{aligned} f_j(t) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_{j,k}\phi_{j,k}(t) \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^{-\frac{j}{2}} c_{j,k}\phi\left(\frac{t}{2^j}-k\right) \end{aligned} \tag{4.7.16}$$

由式(4.7.16)可得

$$f_j(2^jk)=2^{-\frac{j}{2}}c_{j,k},\quad k\notin\mathbf{Z} \tag{4.7.17}$$

这是$f(t)$在j尺度下的逼近的数值形式，其中$c_{j,k}$由式(4.7.4)确定。由于

$$f_{j-1}(t)=f_j(t)+g_j(t)$$

所以，$f_j(t)$相对于$f_{j-1}(t)$的剩余细节

$$\begin{aligned} g_i(t) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} d_{j,k}\psi_{j,k}(t) \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} d_{j,k}\psi\left(\frac{t}{2^j}-k\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^{-\frac{j}{2}} d_{j,k}\cdot\sqrt{2}\sum_{l\in\mathbf{Z}} g[l]\phi\left(\frac{t}{2^{j-1}}-2k-l\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^{-\frac{j-1}{2}} d_{j,k}\cdot\sum_{n\in\mathbf{Z}} g[n-2k]\phi\left(\frac{t}{2^{j-1}}-n\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}}\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^{-\frac{j-1}{2}} d_{j,k} g[n-2k]\right)\phi\left(\frac{t}{2^{j-1}}-n\right) \end{aligned}$$

由上式可得

$$g_j(2^{j-1}n)=2^{-\frac{j-1}{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} d_{j,k}g[n-2k],\quad n\in\mathbf{Z} \tag{4.7.18}$$

这即是$\{f_j(2^jk)\}_{k\in\mathbf{Z}}$相对于$\{f_{j-1}(2^{j-1}k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$的细节的数值形式。

4.7.3 离散序列分解的滤波器表示

实际上，式(4.7.4)和式(4.7.5)所描述的离散序列分解过程，可以用我们熟知的数字滤波器来描述。将它们重新写为

$$c_j[k]=\sum_n h[n-2k]c_{j-1}[n] \tag{4.7.19}$$

$$d_j[k]=\sum_n g[n-2k]c_{j-1}[n] \tag{4.7.20}$$

它们等效于将序列$c_{j-1}[n]$经过冲激响应为$h[-n]$和$g[-n]$的数字滤波器，然后再分别进行“二抽取”。其框图表示如图 4.12 所示。

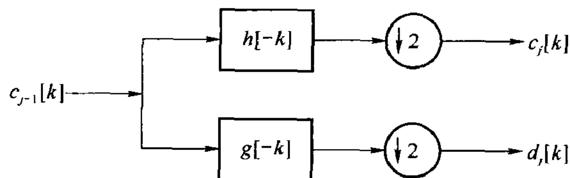


图 4.12　序列分解的等效滤波器示意图

因此，Mallat 分解算法的滤波器表示也就可以表示如图 4.13 所示的滤波器组的级联形式。

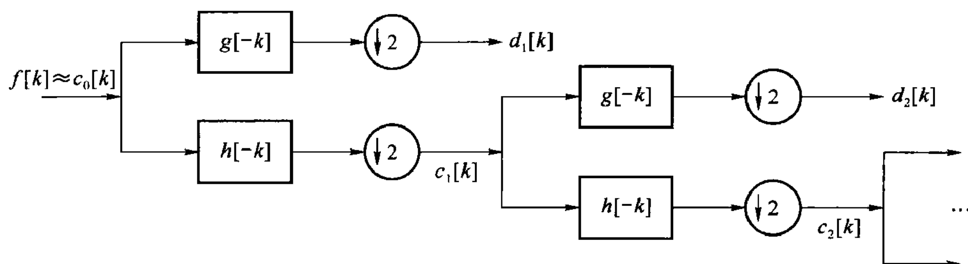


图 4.13　序列分解的等效滤波器组的级联形式示意图

同理，对于重构式(4.7.13)，即

$$c_{j-1,n}=\sum_k c_{j,k}h[n-2k]+\sum_k d_{j,k}g[n-2k]$$

可以写成等效形式，即

$$c_{j-1}[n]=\sum_k c_j[k]h[n-2k]+\sum_k d_j[k]g[n-2k] \tag{4.7.21}$$

式(4.7.21)右边的两个部分实质上都是对于变量 k 的数字卷积运算，用滤波器表示如图 4.14 所示。

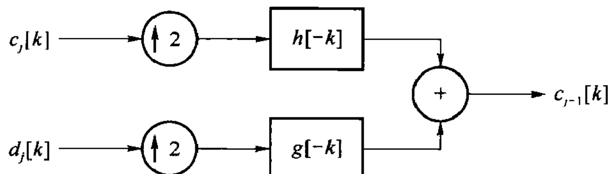


图 4.14　序列重构的等效滤波器示意图

其中的 ↑2 为“二插值”，即每隔一个信号点插入一个 0 构成新的序列。多级重构级联后，Mallat 重构算法就可以表示成如图 4.15 所示的滤波器组的级联形式。

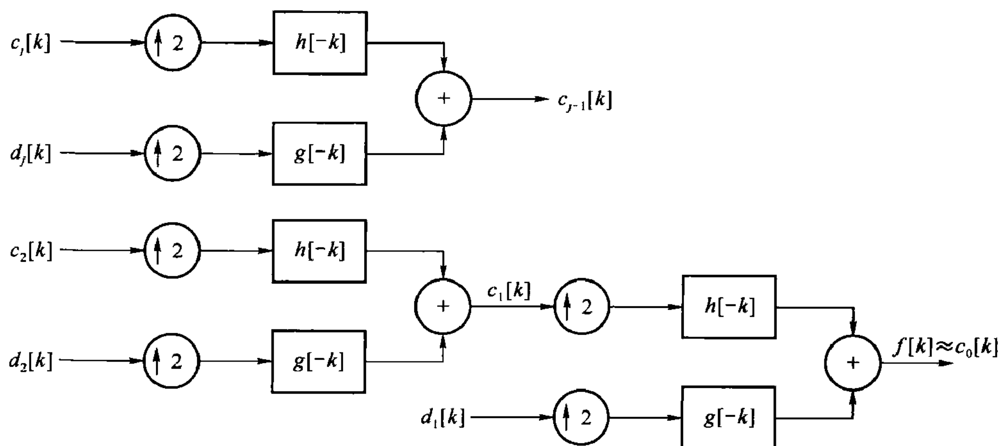


图 4.15　序列重构的等效滤波器组的级联形式示意图

4.7.4　离散序列的双正交分解和重构

双正交方法用于数字信号的多分辨率分析，最关心的实际上是双正交滤波器组 $\tilde{g}[n]$、$\tilde{h}[n]$、$g[n]$、$h[n]$。用这 4 个滤波器可以组成多级滤波器组，对数字信号进行多尺度的分解和重构。

对于信号分解，使用的是 $g[n]$ 和 $h[n]$（称为分解滤波器）构成滤波器组，采用的分解公式为

(1) 离散逼近 $c_{j+1,k}=\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}h[n-2k]c_{j,n}$　　(4.7.22)

(2) 离散细节 $d_{j+1,k}=\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}g[n-2k]c_{j,n}$　　(4.7.23)

双通道分解滤波器组如图 4.11 所示。但是重构公式与正交小波分析略有区别，它使用的是 $\tilde{g}[n]$ 和 $\tilde{h}[n]$（称为重构滤波器）重构信号，采用的重构公式为

$$a_{j-1,n}=\sum_k\tilde{h}[n-2k]a_{j,k}+\sum_k\tilde{g}[n-2k]d_{j,k} \tag{4.7.24}$$

滤波器组如图 4.16 所示。

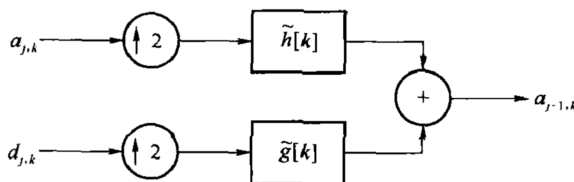


图 4.16　双正交情况下的重构滤波器组

综合分解和重构，双正交滤波器组 $\tilde{g}[n]$、$\tilde{h}[n]$、$g[n]$、$h[n]$ 对离散信号的分解和重构如图 4.17 所示。

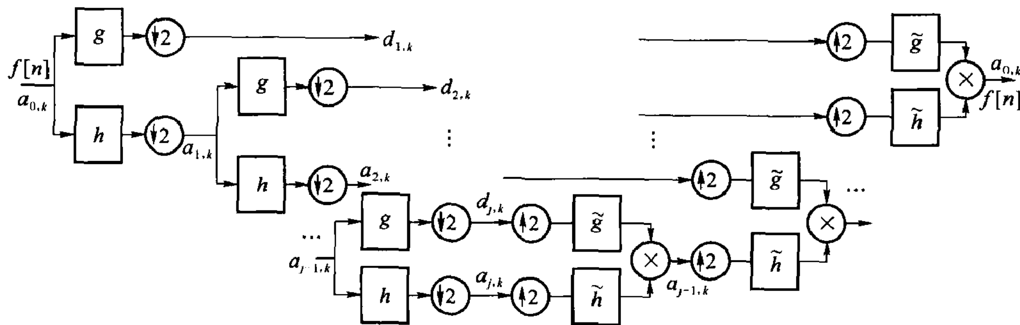


图 4.17　数字信号的双正交分解和重构

因此，对连续函数 $f(t)$ 进行多分辨率分析时，函数的正交分解就变成为

$$f(t)=\sum_n c_{j,n}\tilde{\phi}_{j,n}(t)+\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_n d_{j,n}\tilde{\psi}_{j,n}(t) \tag{4.7.25}$$

当 $j\to+\infty$ 可以得到 $f(t)$ 的双正交小波分解，即

$$f(t)=\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}d_{j,n}\widetilde{\psi}_{j,n}(t)=\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\langle f(t),\psi_{j,k}(t)\rangle\cdot\widetilde{\psi}_{j,n}(t) \tag{4.7.26}$$

在双正交处理中，对偶是相对的，$\widetilde{\psi}(t)$与$\psi(t)$是可以互换的，即式(4.7.26)可以写成

$$f(t)=\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\langle f(t),\widetilde{\psi}_{j,k}(t)\rangle\cdot\widetilde{\psi}_{j,n}(t) \tag{4.7.27}$$

对应于数字信号的处理(或系数的递推分解和重构)，滤波器组$g[n]$和$h[n]$与滤波器组$\widetilde{g}[n]$和$\widetilde{h}[n]$是可以互换的，即在图4.16中，$g[n]$和$h[n]$可以用于信号的重构而$\widetilde{g}[n]$和$\widetilde{h}[n]$可以用于信号的分解。

4.8 二维多分辨率分析

将一维多分辨率分析直接扩展到二维情况，以便将多分辨率分析用于图像处理。与定义4.1.1类似，对$L^2(\mathbf{R}^2)$的多分辨率逼近是构造嵌套的闭子空间序列$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$，满足同样的因果性、完备性和二尺度关系等性质。图像$f(x,y)$在分辨率2^{-j}时的逼近定义为$f(x,y)$在$L^2(\mathbf{R}^2)$的子空间$\widetilde{V}_j$上的正交投影。

我们将讨论一种特定的情况，这时二维矢量空间$\widetilde{V}_j$可以分离为两个相同的一维矢量空间V_j的张量积，即

$$\widetilde{V}_j=V_j\otimes V_j,\ \forall j\in\mathbf{Z} \tag{4.8.1}$$

如果$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$为$L^2(\mathbf{R})$的多分辨率逼近，那么$\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$构成对$L^2(\mathbf{R}^2)$的多分辨率逼近。这时二维尺度函数为两个相同的一维尺度函数的乘积，即

$$\boldsymbol{\Phi}(x,y)=\phi(x)\phi(y) \tag{4.8.2}$$

$\widetilde{V}_j$的正交基为

$$\begin{aligned}&\{2^{-j}\boldsymbol{\Phi}(2^{-j}x-n,2^{-j}y-m)\}_{n,m\in\mathbf{Z}}\\=&\{2^{\frac{-j}{2}}\phi(2^{-j}x-n)2^{\frac{-j}{2}}\phi(2^{-j}y-m)\}_{n,m\in\mathbf{Z}}\\=&\{\phi_{j,n}(x)\phi_{j,m}(y)\}_{n,m\in\mathbf{Z}}\end{aligned} \tag{4.8.3}$$

式(4.8.3)中j为尺度参数，n和m分别为沿x和y方向的平移参数。离散逼近信号定义为下述内积

$$a_j(n,m)=\langle f(x,y),\phi_{j,n}(x)\phi_{j,m}(y)\rangle \tag{4.8.4}$$

这时$\widetilde{\mathbf{V}}_j$和$\widetilde{\mathbf{V}}_{j-1}$中的正交补$\widetilde{W}_j$要稍微复杂一点。

定理 4.1 设$\psi(x)$是与$\phi(x)$相对应的一维小波，那么下列3个小波

$$\psi^1(x,y)=\phi(x)\psi(y),\quad \psi^2(x,y)=\psi(x)\phi(y),\quad \psi^3(x,y)=\psi(x)\psi(y) \tag{4.8.5}$$

经二进伸缩和平移形成的函数族

$$\begin{aligned}&\{2^{-j}\psi^1(2^{-j}x-n,2^{-j}y-m),2^{-j}\psi^2(2^{-j}x-n,2^{-j}y-m),\\&2^{-j}\psi^3(2^{-j}x-n,2^{-j}y-m)\}_{j,n,m\in\mathbf{Z}}\end{aligned} \tag{4.8.6}$$

是$\widetilde{W}_j$的正交规范基，且

$$\{2^{-j}\psi^1(2^{-j}x-n,2^{-j}y-m),2^{-j}\psi^2(2^{-j}x-n,2^{-j}y-m),\\ 2^{-j}\psi^3(2^{-j}x-n,2^{-j}y-m)\}_{j,n,m\in\mathbf{Z}} \tag{4.8.7}$$

是 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 的正交规范基。

证明：$\widetilde{W}_j$ 是 $\widetilde{\mathbf{V}}_j$ 在 $\widetilde{\mathbf{V}}_{j-1}$ 中的正交补，即

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{j-1}=\widetilde{\mathbf{V}}_j\oplus\widetilde{W}_j \tag{4.8.8}$$

由于 $\widetilde{\mathbf{V}}_{j-1}=\widetilde{\mathbf{V}}_j\oplus\widetilde{W}_j$，将它代入式(4.8.1)有

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_{j-1}&=V_{j-1}\otimes V_{j-1}=(V_j\oplus W_j)\otimes(V_j\oplus W_j)\\&=(V_j\otimes V_j)\oplus(V_j\otimes W_j)\oplus(W_j\otimes V_j)\oplus(W_j\otimes W_j)\\&=\widetilde{V}_j\oplus\widetilde{W}_j^1\oplus\widetilde{W}_j^2\oplus\widetilde{W}_j^3\end{aligned} \tag{4.8.9}$$

对照式(4.8.8)和式(4.8.9)，可得

$$\widetilde{W}_j=\widetilde{W}_j^1\oplus\widetilde{W}_j^2\oplus\widetilde{W}_j^3 \tag{4.8.10}$$

其中

$$\widetilde{W}_j^1=V_j\otimes W_j,\quad \widetilde{W}_j^2=W_j\otimes V_j,\quad \widetilde{W}_j^3=W_j\otimes W_j \tag{4.8.11}$$

因为 $V_j\perp W_j$，所以 $\widetilde{V}_j,\widetilde{W}_j^1,\widetilde{W}_j^2,\widetilde{W}_j^3$ 必定两两正交，且 $\{\phi_{j,n}(x)\psi_{j,m}(y)\}_{n,m\in\mathbf{Z}}$ 是 $\widetilde{W}_j^1$ 的正交规范基，$\{\psi_{j,n}(x)\phi_{j,m}(y)\}_{n,m\in\mathbf{Z}}$ 是 $\widetilde{W}_j^2$ 的正交规范基，$\{\psi_{j,n}(x)\psi_{j,m}(y)\}_{n,m\in\mathbf{Z}}$ 是 $\widetilde{W}_j^3$ 的正交规范基。

和一维的情况一样，$L^2(\mathbf{R}^2)$ 可分解为所有分辨率上小波空间的正交和

$$L^2(\mathbf{R}^2)=\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty}\widetilde{W}_j \tag{4.8.12}$$

因而，式(4.8.7)所示函数族是 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 的正交规范基。证毕。

按上述定理，分别定义 3 个离散细节信号

$$d_j^1(n,m)=\langle f(x,y),2^{-j}\psi^1(2^{-j}x-n,2^{-j}y-m)\rangle=\langle f(x,y),\phi_{j,n}(x)\psi_{j,m}(y)\rangle \tag{4.8.13}$$

$$d_j^2(n,m)=\langle f(x,y),2^{-j}\psi^2(2^{-j}x-n,2^{-j}y-m)\rangle=\langle f(x,y),\psi_{j,n}(x)\phi_{j,m}(y)\rangle \tag{4.8.14}$$

$$d_j^3(n,m)=\langle f(x,y),2^{-j}\psi^3(2^{-j}x-n,2^{-j}y-m)\rangle=\langle f(x,y),\psi_{j,n}(x)\psi_{j,m}(y)\rangle \tag{4.8.15}$$

信号分解的表达式如下：

$$a_{j+1}(n,m)=\sum_l\sum_k\overline{h}(2m-l)\overline{h}(2n-k)a_j(k,l) \tag{4.8.16}$$

$$d_{j+1}^1(n,m)=\sum_l\sum_k\overline{g}(2m-l)\overline{h}(2n-k)a_j(k,l) \tag{4.8.17}$$

$$d_{j+1}^2(n,m)=\sum_l\sum_k\overline{h}(2m-l)\overline{g}(2n-k)a_j(k,l) \tag{4.8.18}$$

$$d_{j+1}^3(n,m)=\sum_l\sum_k\overline{g}(2m-l)\overline{g}(2n-k)a_j(k,l) \tag{4.8.19}$$

它们是二维信号多分辨率分析的 Mallat 算法，如图 4.18 所示。

如果原始图像为 a_0，其可被逐级分解为如下图像

$$\{a_J,d_j^1,d_j^2,d_j^3,1\leqslant j\leqslant J\} \tag{4.8.20}$$

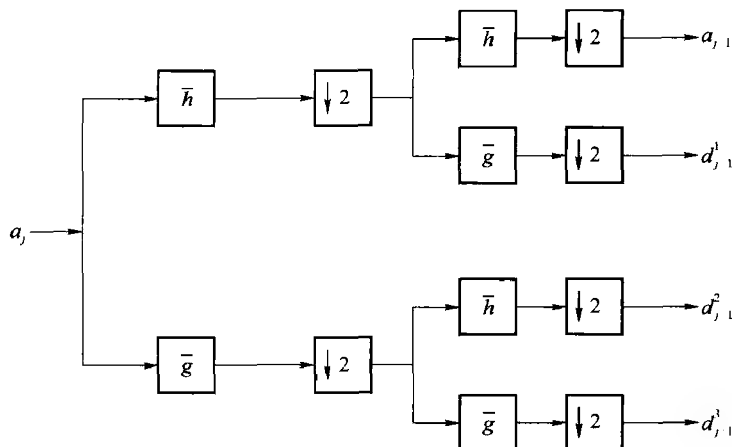


图 4.18　二维信号的分解

设 a_0 有 N^2 个像素，那么 a_j 和 d_j^1,d_j^2,d_j^3 有 $2^{-j}N\times 2^{-j}N$ 个像素，每次分解都保持像素的数目不变，这是由于使用了正交基进行的分解。正交小波分解最有意义的还在于它可以看成是图像在一组独立的，具有空间取向性的频率通道上的分解，a_{j+1}对应 a_j 的低频成分，d_{j+1}^1对应纵向高频（水平边缘），d_{j+1}^2对应横向高频（垂直边缘），而 d_{j+1}^3则对应两个方向上的高频（斜线方向）。由图 4.8.1 可以看到，将 a_j 先沿横向（x 方向）滤波取偶数样本，再沿纵向（y 方向）滤波取偶数样本，便得到 4 个子图像 a_{j+1}和 $d_{j+1}^1,d_{j+1}^2,d_{j+1}^3$。由于沿横向和纵向低通滤波得 a_{j+1}，故 a_{j+1}对应 a_j 的低频成分；而 d_{j+1}^1是沿横向低通滤波再沿纵向高通滤波，故 d_{j+1}^1对应纵向高频（水平边缘）；d_{j+1}^2是沿横向高通滤波再沿纵向低通滤波，故 d_{j+1}^2对应横向高频（垂直边缘）；d_{j+1}^3沿横向和纵向都是高通滤波，故 d_{j+1}^3则对应两个方向的高频（斜线方向）。这就解释了小波多分辨率分析确实是对图像在不同方向上频率成分的分解。由于采用了正交小波基分解，4 个子图像是相互独立的，不存在信息冗余，正因为这样，才使每次分解都保持像素的数目不变。

二维信号的 Mallat 重构算法如下：

$$a_{j+1}(n,m)=\sum_k\sum_l h(n-2k)h(m-2l)a_j(k,l)+\sum_k\sum_l g(n-2k)h(m-2l)d_j^1(k,l)+\sum_k\sum_l h(n-2k)g(m-2l)d_j^2(k,l)+\sum_k\sum_l g(n-2k)g(m-2l)d_j^3(k,l) \tag{4.8.21}$$

上述 Mallat 重构算法如图 4.19 所示。

如图 4.18 及图 4.19 所示的二维小波分解与重构算法，利用其可分离特性，在算法实现时分别按行进行一维小波变换，然后对按行变换后的数据再按列进行一维小波变换来完成。与一维的情形类似，在实际应用中，由于图像信号总是存在于有限区域的，也存在如何处理边界的问题。典型的处理方法是对图像进行周期延拓和对称延拓。在用小波变换进行图像压缩时，由于边界的不连续性，会使得边界附近的小波变换系数的衰减变慢，从而影响图像的压缩比，因而在图像压缩应用中，若使用的是具有对称性质的双正交小波滤波器，一般对边界采用对称延拓的方式，使边界保持连续，以提高压缩性能。

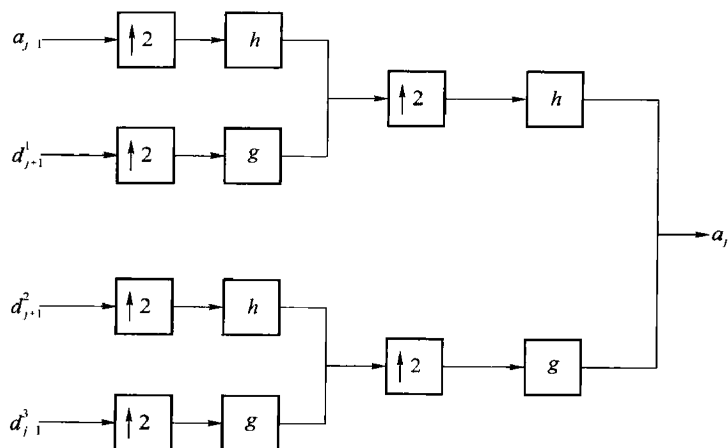
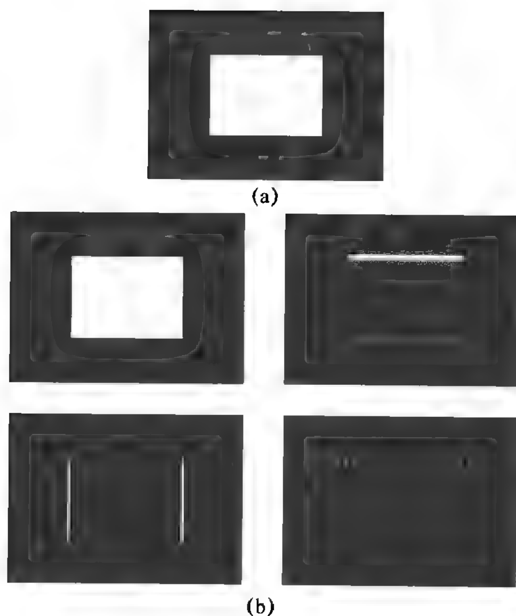


图 4.19　二维信号的重构

图 4.20(a)为原始图像，它是黑色背景中的一个白方块。利用小波变换将它分解成 4 个子图像，一般将 a_{j+1} 和 d^1_{j+1}，d^2_{j+1}，d^3_{j+1} 分别置于左上角、右上角、左下角和右下角，如图 4.20(b)所示。图 4.20 非常清楚地说明了二维多分辨率分析的空间取向性：d^1_{j+1} 确实检测出两条水平边缘，d^2_{j+1} 检测出两条垂直边缘，d^3_{j+1} 检测出 4 个角。在上面的分解过程中，选用了 db2 小波，如改换为其他小波，会得到稍微不同的结果。但如选用更光滑，从而支撑宽度更大的 db20 小波，结果就很不理想了。一般来说，对比较奇异的图像，如图 4.20(a)所示的图像，应选用支撑宽度较小的小波，而对较光滑的图像，则应选用支撑宽度较大的小波。



(a)

(b)

图 4.20　图像信号的 Mallat 分解

第5章 小波包和多小波

为了满足小波在不同领域应用的需要，人们从许多角度对小波理论和多分辨率分析进行了推广，如小波包、多小波、混合小波包理论、M 带小波、第二代小波等。本章主要介绍小波包和多小波。

小波包分析是小波分析的延伸，其基本思想是让信息能量集中，在细节中寻找有序性，把其中的规律筛选出来，为信号提供一种更加精细的分析方法。它将频带进行多层次划分，对多分辨率分析没有细分的高频部分进一步分解，并能够根据被分析信号的特征自适应地选择相应频带，使之与信号频谱相匹配，从而提高时一频分辨率。

多小波是小波理论的新发展，多小波是指由两个或两个以上的函数作为尺度函数生成的小波。为了区别多小波与传统意义下由一个尺度函数生成的小波，称后者为纯量小波(scalar wavelet)，也称单小波(unit wavelet)。由于多小波可以同时拥有许多良好的性质，如对称性、短支撑性、正交性和高阶消失矩等，使得多小波比单一小波具有更多的优势。

5.1 小波包

离散小波变换和二进小波变换只对信号的低频部分做进一步分解，而对高频部分即信号的细节部分不再继续分解。这种信号分析方法特别适用于具有丰富低频成分的信号。但也有另外一些类型的信号，它们没有或很少有低频成分，而在相对较高的频率范围内存在若干明显的谱峰。在这种情况下，所希望的信号分析应该是不仅只对低频频段做精细划分，而且也能对高频频段做更精细的划分。为此，需要有能将小波空间划分为子空间的基函数。M. V. Mickerhanser，R. R. Coifman等人在小波变换基础上进一步提出了小波包的概念，它可以看做是函数空间逐级正交部分的扩展。

5.1.1 小波包定义与性质

小波包分析(Wavelet Packet Analysis)能够为信号提供一种更加精细的分析方法，小波包不仅对尺度空间 V_j 进行分解，同时也对小波空间 W_j 进行进一步的分解，并能根据被分析信号的特征，自动地选择相应频带，使之与信号频谱相匹配。

我们用一个三层的分解为例，对小波包分析进行说明，其小波包分解树如图 5.1 所示。

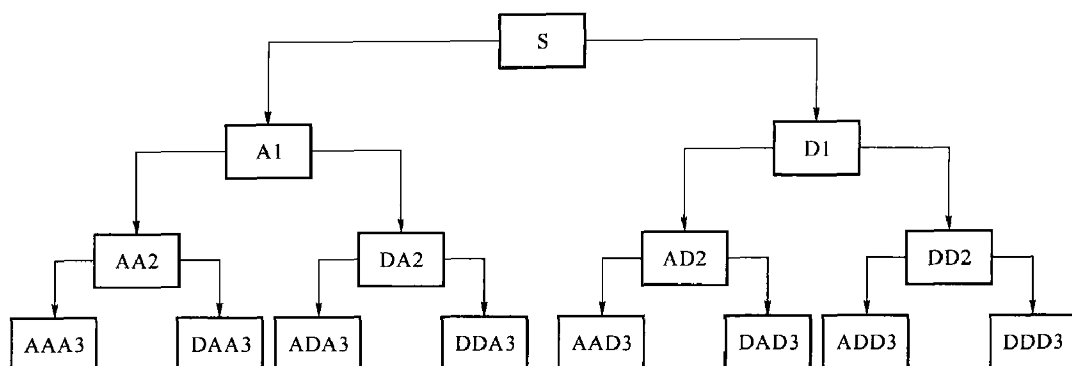


图 5.1 三层小波包分解树

图中，A 表示低频，D 表示高频，末尾的序号数表示小波包分解的层数（也即尺度数）。

分解具有关系：

$$S=AAA3+DAA3+ADA3+DDA3+AAD3+DAD3+ADD3+DDD3$$

在多分辨分析中，$L^2(\mathbf{R})=\bigoplus\limits_{j\in\mathbf{Z}}W_j$，表明多分辨分析是按照不同的尺度因子 j 把 Hilbert 空间 $L^2(\mathbf{R})$ 分解为所有子空间 $W_j(j\in\mathbf{Z})$ 的正交和。其中，W_j 为小波函数 $\psi(t)$ 的闭包（小波空间）。现在我们希望进一步对小波子空间 W_j 按照二进制分式进行频率的细分，以达到提高频率分解率的目的。

一种自然的做法是将尺度子空间 V_j 和小波子空间 W_j 用一个新的子空间 U_j^n 统一起来表征，若令

$$\left.\begin{aligned} U_j^0 &= V_j \\ U_j^1 &= W_j \end{aligned} \quad j\in\mathbf{Z}\right\} \tag{5.1.1}$$

则 Hilbert 空间的正交分解 $V_j=V_{j+1}\oplus W_{j+1}$ 即可用 U_j^n 的分解统一为：

$$U_j^0=U_{j+1}^0\oplus U_{j+1}^1 \quad j\in\mathbf{Z} \tag{5.1.2}$$

定义子空间 U_j^n 是函数 $u_n(t)$ 的闭包空间，而 U_j^{2n} 是函数 $u_{2n}(t)$ 的闭包空间，并令 $u_n(t)$ 满足下面的双尺度方程：

$$\begin{cases} u_{2n}(t) = \sqrt{2}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} h[k]u_n(2t-k) \\ u_{2n+1}(t) = \sqrt{2}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} g[k]u_n(2t-k) \end{cases} \tag{5.1.3}$$

式中，$g(k)=(-1)^k h(1-k)$，即两系数也具有正交关系。当 $n=0$ 时，以上两式直接给出

$$\begin{cases} u_0(t) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} h[k]u_0(2t-k) \\ u_1(t) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} g[k]u_0(2t-k) \end{cases} \tag{5.1.4}$$

与在多分辨率分析中，$\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 满足双尺度方程：

$$\begin{cases} \varphi(t) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} h[k]\phi(2t-k),\{h[k]\}_{k\in\mathbf{Z}}\in l^2 \\ \psi(t) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} g[k]\phi(2t-k),\{g[k]\}_{k\in\mathbf{Z}}\in l^2 \end{cases} \tag{5.1.5}$$

相比较，$u_0(t)$ 和 $u_1(t)$ 分别退化为尺度函数 $\phi(t)$ 和小波基函数 $\psi(t)$。式(5.1.4)是式(5.1.2)的

等价表示。把这种等价表示推广到 $n\in \mathbf{Z}_+$（非负整数）的情况，即得式(5.1.3)的等价表示为

$$U_j^n = U_{j+1}^n \oplus U_{j+1}^{2n+1} \qquad j\in \mathbf{Z}; n\in \mathbf{Z}_+ \tag{5.1.6}$$

定义 5.1.1 （小波包）由式(5.1.3)构造的序列 $\{u_n(t)\}$（其中 $n\in \mathbf{Z}_+$）称为由基函数 $u_0(t)=\phi(t)$ 确定的正交小波包。当 $n=0$ 时，即为式(5.1.4)的情况。

由于 $\phi(t)$ 由 $h[k]$ 唯一确定，所以又称 $\{u_n(t)\}_{n\in \mathbf{Z}_+}$ 为关于序列 $\{h[k]\}$ 的正交小波包。

小波包具有以下性质：

性质 1 对于任意非负整数 n，若它的二进制表示为

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j 2^j, \varepsilon_j = 0 \text{ 或 } 1 \tag{5.1.7}$$

则小波包 μ_n 的傅里叶变换为

$$\hat{\mu}_n(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_{\varepsilon_j}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \tag{5.1.8}$$

其中

$$\begin{cases} m_0(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h[k] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega} \\ m_1(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g[k] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega} \end{cases} \tag{5.1.9}$$

由于式(5.1.7)中的和是有限和，所以式(5.1.8)中的积为有限积。当 h 为有限滤波器时，式(5.1.9)中 $m_0(\omega)$，$m_1(\omega)$ 都是有限和。性质 1 表明，μ_n 的傅里叶变换可以由 $m_0(\omega)$，$m_1(\omega)$ 表示。

性质 2 对于任意非负整数 n，μ_n 具有平移正交性，即

$$\langle \mu_n(t-j), \mu_n(t-k) \rangle = \delta_{j,k}, j,k\in \mathbf{Z}$$

性质 2 表明，μ_n 保持了尺度函数 ϕ 的正交性。

性质 3 对于任意非负整数 n，μ_{2n} 与 μ_{2n+1} 之间具有正交性，即

$$\langle \mu_{2n}(t-j), \mu_{2n+1}(t-k) \rangle = \delta_{j,k}, j,k\in \mathbf{Z}$$

性质 3 表明，尺度函数 $\mu_0=\phi$ 与小波函数 $\mu_1=\psi$ 之间的正交性可以推广到 μ_{2n} 与 μ_{2n+1}。

性质 4 小波包的平移系 $\{\mu_n(t-k), n\in \mathbf{Z}_+, k\in \mathbf{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一组规范正交基，其中 $\mathbf{Z}_+$ 表示非负整数的全体。

5.1.2 小波包的空间分解

从多分辨率分析的角度看，小波分析就是对 $L^2(\mathbf{R})$ 进行正交和分解，即

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j\in \mathbf{Z}} W_j \tag{5.1.10}$$

其中，每个小波子空间 W_j 都可由小波基 $\{\psi_{j,k}\}_{k\in \mathbf{Z}}$ 生成。设 $\psi(t)$ 及其傅里叶变换 $\Psi(\omega)$ 的窗口半径分别为 Δ_ψ 与 Δ_Ψ，则基函数 $\psi_{j,k}(t)=2^{j/2}\psi(2^j t-k)$，$k\in \mathbf{Z}$ 及其傅里叶变换 $\Psi_{j,k}$ 的窗口半径分别为 $\frac{1}{2^j}\Delta_\psi$ 和 $2^j\Delta_\Psi$。这表明，随着 j 的增大，W_j 的基函数 $\psi_{j,k}$ 的窗口宽度随之减小，而其傅里叶变换的窗口宽度却随之增大。也就是说，随着 j 的增大，相应小波基函数的空间局部性越好，即空间分辨率越高，而其频谱的局部性变得越差，即频谱分辨率越低。这一特性是正交小波基的一大缺陷。为克服这一不足，需要对 W_j 做进一步的分解。

下面介绍如何用小波包对小波空间 W_j 进行更精细的分解，使得在新的标准正交基下，

能够对包含大量细节的信号进行更好的时频局部化分析。

对任意非负整数 $n\in\mathbf{Z}_+$ 和任何一个整数 $j\in\mathbf{Z}$，令 U_j^n 表示由小波包 μ_n 的二进伸缩和平移 $2^{j/2}\mu_n(2^jt-k)$，$k\in\mathbf{Z}$ 的线性组合生成的 $L^2(\mathbf{R})$ 的闭子空间，则

$$\begin{cases}U_j^0=V_j, & j\in\mathbf{Z}\\ U_j^1=W_j, & j\in\mathbf{Z}\end{cases}$$

其中，$\{V_j\}$ 是由尺度函数 $\mu_0=\phi$ 生成的 $L^2(\mathbf{R})$ 的多分辨分析，而 $\{W_j\}$ 是由小波 $\mu_1=\Psi$ 生成的正交小波子空间序列。利用新的记号，可将正交分解

$$V_j=V_{j+1}\oplus W_{j+1},j\in\mathbf{Z}$$

改写为

$$U_j^0=U_{j+1}^0\oplus U_{j+1}^1,j\in\mathbf{Z}$$

定理 5.1 表明，这个正交分解能够由 $n=0$ 推广到任意 $n\in\mathbf{Z}_+$。

定理 5.1　对于任意非负整数 $n\in\mathbf{Z}_+$，有

$$U_j^n=U_{j+1}^{2n}\oplus U_{j+1}^{2n+1},j\in\mathbf{Z} \tag{5.1.11}$$

证明：由性质 3 可知，$U_j^{2n}\perp U_j^{2n+1}$。

根据小波包的定义 5.1.1 可以推出，

$$\begin{cases}\mu_{2n}(t-l)=\sqrt{2}\sum\limits_k h[k-2l]\mu_n(2t-k)\\ \mu_{2n+1}(t-l)=\sqrt{2}\sum\limits_k g[k-2l]\mu_n(2t-k)\end{cases}$$

将上式中的 t 用 2^jt 表示，可知，$U_{j+1}^{2n}\subseteq U_j^n$，$U_{j+1}^{2n+1}\subseteq U_j^n$，故 $U_{j+1}^{2n}+U_{j+1}^{2n+1}\subseteq U_j^n$。

根据小波包的定义即 h,g 的性质，不难证明下式成立。

$$\mu_n(t-l)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h[l-2k]\mu_{2n}\left(\frac{t}{2}-k\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}g[l-2k]\mu_{2n+1}\left(\frac{t}{2}-k\right) \tag{5.1.12}$$

由此可推出，$U_j^n\subseteq U_{j+1}^{2n}\oplus U_{j+1}^{2n+1}$。

综上所述，有 $U_j^n=U_{j+1}^{2n}\oplus U_{j+1}^{2n+1}$。证毕。

定理 5.2　对于每个 $j=1,2,\cdots$，有

$$\begin{aligned}W_j&=U_{j+1}^2\oplus U_{j+1}^3\\&=U_{j+2}^4\oplus U_{j+2}^5\oplus U_{j+2}^6\oplus U_{j+2}^7\\&=U_{j+k}^{2^k}\oplus U_{j+k}^{2^k+1}\oplus\cdots\oplus U_{j+k}^{2^{k+1}-1}\\&=\cdots\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

且对给定的 $0\leqslant m<2^k$，$1\leqslant k\leqslant j$，及 $j\geqslant 1$，函数系

$$\{2^{\frac{j+k}{2}}\mu_{2^k+m}(2^{j+k}t-l),l\in\mathbf{Z}\}$$

是空间 $U_{j+k}^{2^k+m}$ 的一个规范正交基。

由于 $W_j=U_j^1$，反复利用定理 5.1 即可证明定理 5.2。

若设小波空间 W_j 的正交小波基是 $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$，则正交小波 $\Psi_{j,k}$ 在第 j 个频带内提取的局部信息的频率窗为 $H_j=(2^{j+1}\Delta_\Psi,2^{j+2}\Delta_\Psi)$，其中 Δ_Ψ 为小波 ψ 的傅里叶变换 Ψ 的半径。显然，随着 $j(j>0)$ 的增大，H_j 的宽度增加。定理 5.1.2 表明，若使用式(5.1.13)中第 k 个正交分解细分空间 W_j，则第 j 个频带 H_j 进一步划分成 2^k 个“子频带”$H_j^{k,m}$，$m=0,1,\cdots,2^k-1$。因

此，小波包具有划分较高频率频带的能力，可得到比较好的频率局部化。

在实际应用中，我们通常关心的是 $L^2(\mathbf{R})$ 的某个子空间 $V_L=U_L^0$ 的小波分解和小波包分解。现以 $L=3$ 为例，比较 $V_3=U_3^0$ 的小波分解和小波包分解，如图 5.2 所示，其中图 5.2(a)表示 V_3 经小波分解的空间剖分，而图 5.2(b)表示 V_3 经小波包分解的空间剖分。

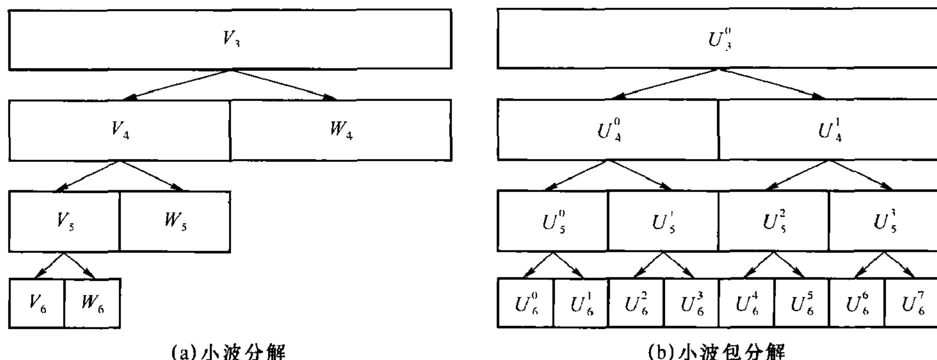


图 5.2 同一空间利用小波分解和小波包分解的空间剖分

在图 5.2(a)中，子空间 V_6、W_6、W_5、W_4 的值将 V_3 覆盖，且它们之间不相互重叠。易知，V_6、W_6、W_5、W_4 中每个空间的基函数放在一起构成 V_3 的一组规范小波正交基，也即Mallat多分辨分析的小波正交基。它们在图 5.2(b)中对应的相同的空间为 U_6^0、U_6^1、U_5^1、U_4^1，如图5.3(a)所示。一般地，在图 5.2(b)的二叉树上取一组子空间集合，如果其直和恰能将 $V_3=U_3^0$ 空间覆盖，相互间又不重叠，则这组空间集合的正交规范基便组成一个小波包正交基。除了小波基外，还存在 V_3 的许多其他剖分对应不同的规范正交小波包基，如 U_6^0、U_6^1、…、U_6^7，如图 5.3(b)所示；U_6^0、U_6^1、U_5^1、U_6^4、U_6^5、U_5^3，如图 5.3(c)所示；U_4^0、U_6^4、U_6^5、U_6^6、U_6^7，如图 5.3(d)所示。

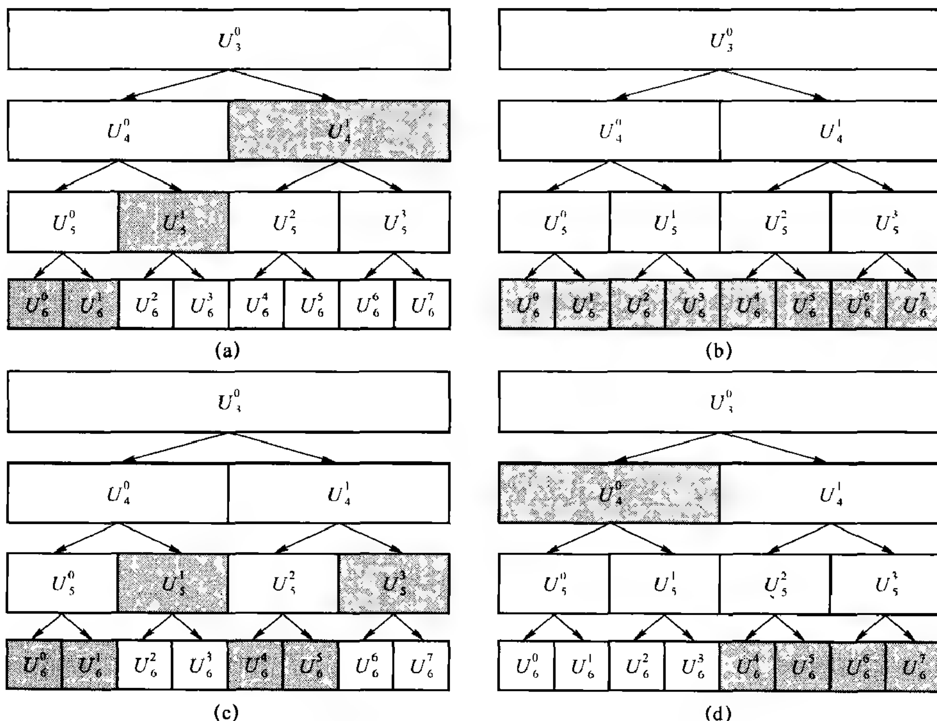


图 5.3 V_3 的小波包二叉树中构成 V_3 的不相互重叠覆盖的几种情况

称每一个节点有 0 个或 2 个子节点的二叉树为可容许树。可容许树与小波包正交基之间存在一一对应关系，例如，图 5.3 中的 4 个空间剖分对应的可容许子树如图 5.4 所示。

已证明，在深度为 J 的完全小波包二叉树中，不同的可容许子树的个数 B_J 满足 $2^{2^{J-1}} \leqslant B_J \leqslant 2^{\frac{5}{4}2^{J-1}}$。特别地，当 $J=1+L=1+\log_2 N$ 时，有 $2^N \leqslant B_L \leqslant 2^{5N/4}$。这说明 V_3 的小波包二叉树中至少有 2^8 个正交小波包基。

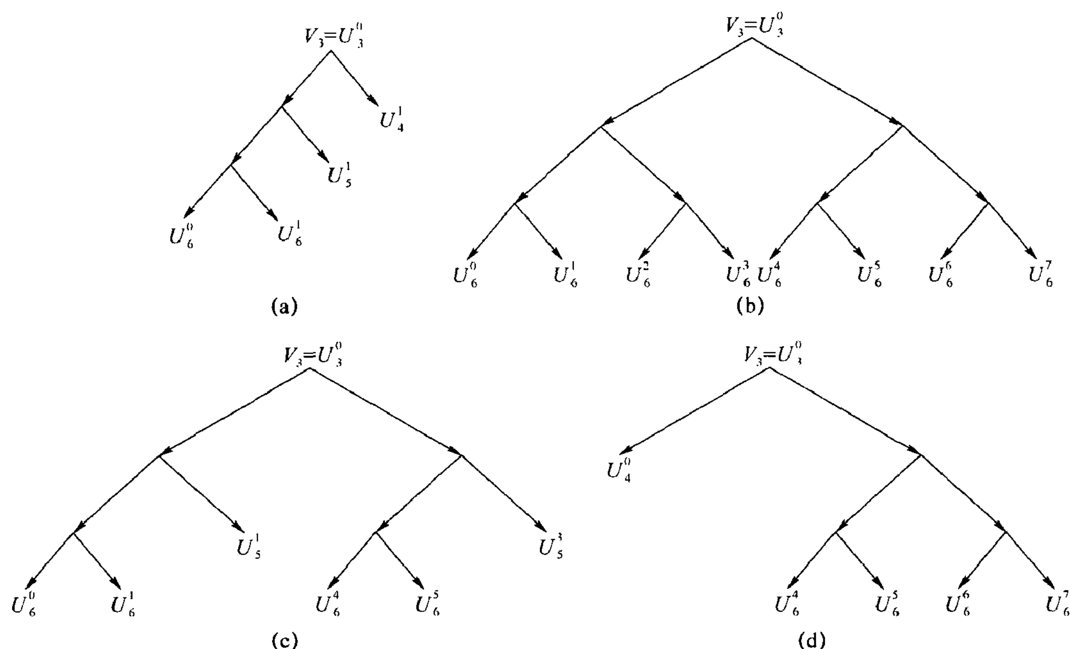


图 5.4　图 5.3 中 4 个空间剖分对应的可容许子树

5.1.3　小波包滤波器组

下面介绍如何通过离散小波变换的滤波器组快速计算出小波包系数。对任何长度为 $N=2^L$ 的均匀采样的离散输入信号 $b[k]$，为计算小波包系数，将 $b[k]$ 在尺度 2^L 下的一个逼近函数 $f(t)\in V_L=U_L^0$ 联系起来，它的分解系数 $a_L[n]=\langle f,\phi_{L,n}\rangle$ 满足：

$$b[k]=N^{1/2}a_L[k]\approx f(N^{-1}k) \tag{5.1.14}$$

U_L^0 的小波包分解二叉树如图 5.5 所示。我们要解决的主要问题是，已知 $f(t)$ 在 U_L^0 的子空间 U_j^n 上的小波包系数，计算出 $f(t)$ 在 U_j^n 的两个子空间 U_{j+1}^{2n} 和 U_{j+1}^{2n+1} 上的小波包系数，其中 U_j^n 与 U_{j+1}^{2n} 和 U_{j+1}^{2n+1} 之间满足式(5.1.11)，$j=L-1,L-2,\cdots,1,0$。

根据定理 5.1.2，子空间 U_{j+1}^n 的规范正交基为

$$\{2^{(j+1)/2}\mu_n(2^{j+1}t-k),k\in Z\}$$

所以，$f(t)$ 在子空间 U_{j+1}^n 上的投影(小波包)系数为

$$d_{j+1}^n[k]=\langle f(t),2^{(j+1)/2}\mu_n(2^{j+1}t-k)\rangle$$

在树的根部，即 $j=L-1$ 时，$d_L^0[k]=a_L[k]$ 可通过式(5.1.14)由 $b[k]$ 算出。

类似地，记 $f(t)$ 在子空间 U_j^{2n} 和 U_j^{2n+1} 上的投影(小波包)系数分别为 d_j^{2n} 和 d_j^{2n+1}，则由

小波包的定义及式(5.1.11),容易将 Mallat 小波快速算法推广到小波包的情况,从而得到如下的小波包快速分解与重构算法。

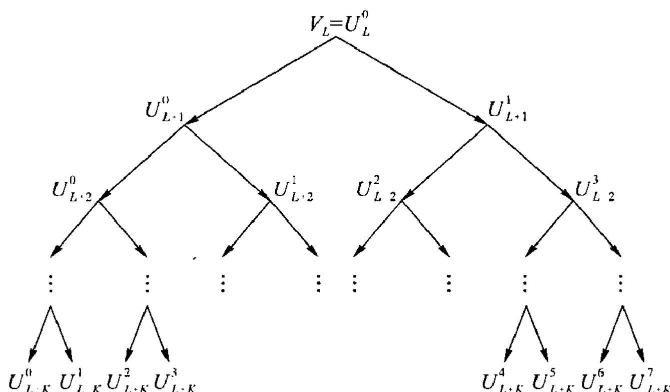


图 5.5 $V_L=U_L^0$ 的小波包分解二叉树

命题 5.1.1

小波包分解:

$$\begin{cases} d_j^{2n}[k]=\sum_{l\in\mathbf{Z}}h[l-2k]d_{j+1}^n[l] \\ d_j^{2n+1}[k]=\sum_{l\in\mathbf{Z}}g[l-2k]d_{j+1}^n[l] \end{cases} \tag{5.1.15}$$

小波包重构:

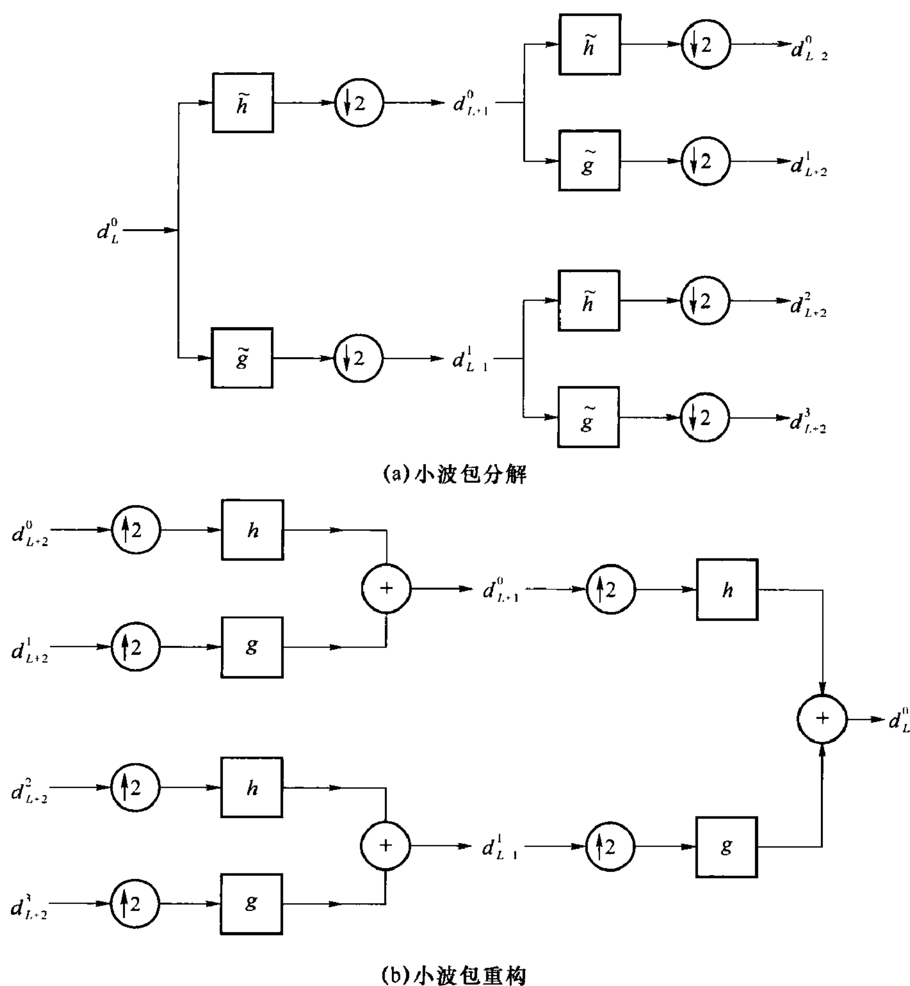
$$d_{j+1}^n[k]=\sum_{l\in\mathbf{Z}}h[k-2l]d_j^{2n}[l]+\sum_{l\in\mathbf{Z}}g[k-2l]d_j^{2n+1}[l] \tag{5.1.16}$$

由图 5.5 可以看出,从小波包树的树根开始,沿着二叉树的树枝按照式(5.1.15)迭代计算,可算出所有的小波包系数,如图 5.6(a)所示。反之,给定图 5.5 中任一可容许子树叶结点上的小波包系数,从树最底层开始,反复利用式(5.1.16)进行重构,直至树的顶部即可恢复系数 d_L^0,进而可由式(5.1.14)计算出 $b[k]$。小波包的重构过程如图 5.6(b)所示。

对于有限长信号的小波包算法,我们会遇到与快速小波变换相同的边界卷积问题。一种常用的方法是采用周期延拓的边界处理方法,这时,对每个 j,以及 $0\leqslant n<2^j$,d_{L-j}^n 有 2^{L-j} 个小波包系数。如果将树根所在的层称为树的第 0 层,则树的第 $j(j=1,2,\cdots,)$层共包含 $2^{L-j}\cdot 2^j=2^L=N$ 个小波包系数。所以,一个完全小波包二叉树中从第一层到第 L 层有 $N\log_2 N$ 个小波包系数。

在深度为 $\log_2 N$ 的完全小波包树中,所有的系数可以通过对 $0\leqslant j<L$ 由式(5.1.15)迭代求出。若 h 和 g 有 K 个非零系数,则小波包分解需要 $KN\log_2 N$ 次加法与乘法运算。

从可容许树的小波包系数恢复 $a_L=d_L^0$ 的计算复杂度,是与可容许树中结点的个数有关的。当可容许树是深度为 $\log_2 N$ 的完全二叉树时,运算的次数最多,为 $KN\log_2 N$ 次加法与乘法运算。若可容许树是小波树,则需要少于 $2KN$ 次加法与乘法运算。



(a)小波包分解

(b)小波包重构

图 5.6　小波包系数的分解与重构

5.1.4　最佳小波包基的选择

从小波包基的定义可知，$L^2(\mathbf{R})$小波包基有很多。不同的小波包具有不同的性质，反应不同的信号特性。对特定的信号，要选取最优的小波包基。首先要给出一个信号序列的代价函数，然后在小波库$\{2^{-j/2}U_n(2^{-j}t-k)|_{n\in Z^+,k\in Z}\}$中的所有小波包基中寻找使代价函数最小的基，此基便称为最优基。

一个信号序列 $x=\{x_i\}$的代价函数可以定义为该序列的任何称为熵的实函数 $M(x)$，但 $M(x)$必须满足如下的两个原则：

(1) 序列质量集中度，即当序列元素大体一致相同时，$M(x)$应大，反之应小。

(2) 序列可加性，即 $M(0)=0, M(\{x_i\})=\sum_i M(x_i)$。

下面是一些常用的代价函数：

(1) 设定一门限值 $\varepsilon>0$，并计算序列$\{x_i\}$中绝对值大于 ε 的元素个数 $M(\varepsilon)$，$M(\varepsilon)$即为代价函数。这种代价函数的特点是，给出了所给精度下所需传送的系数个数。

(2) 依据 l^p，任取 $p<2$ 的范数的密集度，即选择一个任意数 $p<2$，并令 $M(x)=\|\{x_i\}\|_p$，

这种代价函数的特点是，一个单位能量函数的 l^p 模越小，则能量越集中在少数系数上。

(3) 对数熵，即令 $M(x)=\sum_i \lg|x_i|^2$，并规定 $\lg 0=0$。

(4) 信息熵，即对序列 $x=\{x_i\}$，定义其 Shannon-Weaker 熵为 $M(x)=-\sum_i p_i \lg p_i$，其中 $p_i=\frac{|x_i|^2}{\|x\|^2}$，且当 $p=0$ 时，规定 $p\lg 0=0$，这种代价函数的特点是，熵是和给定均方误差下的原始信号恢复所需系数成正比的。

假设代价函数 $M(x)$ 已定，则最优基可由如下方法给出。

设 $x=\{x_i\}$ 为空间 V 中的一序列，记 B 为从小波库中选取的一个正交基，记 B_x 是 x 在正交基 B 下的系数。对 $x\in V$，若 $M(Bx)$ 是最小的，则 B 为最优基。

下面以图例方法，给出一个水平树状小波包最优基的选取方法。

图 5.7 为 U_0 的空间分解。

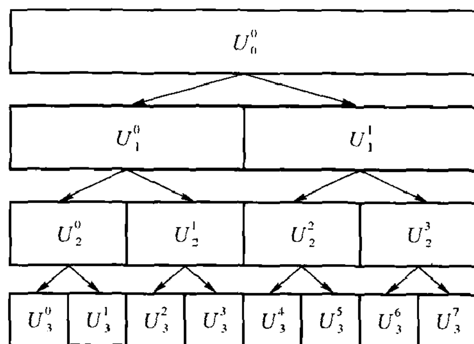


图 5.7　小波包子空间分解关系

图 5.8 为在指定代价函数下的代价值。例如信号序列 $x=\{x_i\}$ 在 U_0 下的投影序列的代价值为 50，其他类推。最底层序号是分解为 U_3 子空间的子空间顺序号。

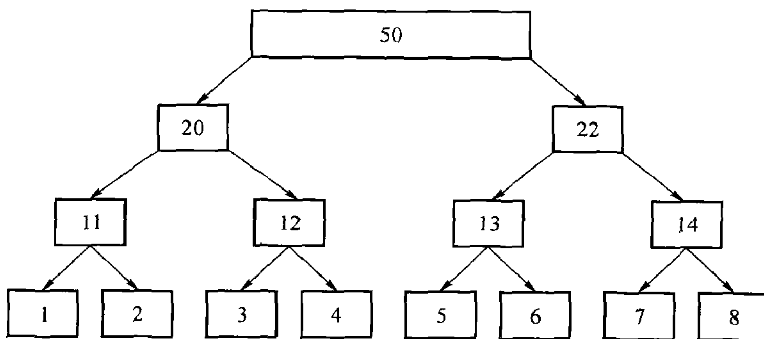


图 5.8　各水平小波包信息代价值

其选取过程由如下两步完成：

(1) 从最低层(即 0 水平)的树开始，以 0 水平的空间分解号作为代价初始参考值并给以标记。称高层节点为父结点，低层结点为子结点。当高层父结点信息代价数比低层子结点信息代价数之和小时，则保留母结点代价数，并给以标记，否则，以子结点信息代价数之和代替母结点的信息代价值。如此上推，直到顶层，如图 5.9 所示。

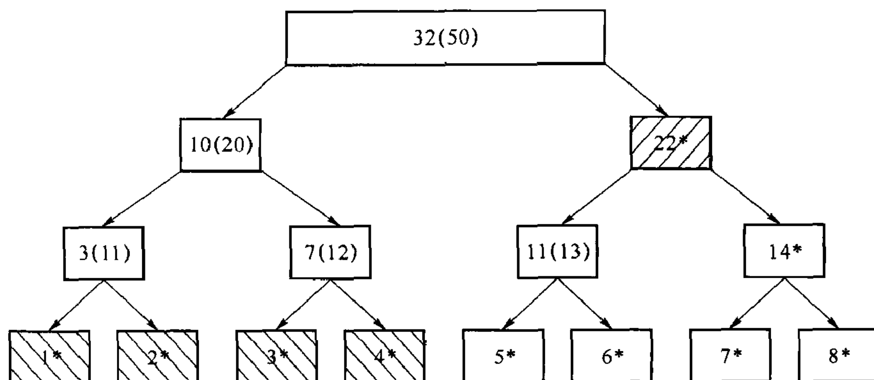


图 5.9　最优基的选取示意图

(2) 检查所有结点，图 5.9 中最优基点涂上阴影，当高层有结点被标示时，其相应低层子结点的标记应删去，最后将选取被标记的并被涂上阴影的结点位置作为最优基，最低层的最终保留下来的标记，作为选取的结点，将最优基中的系数以一定顺序找出。

5.2　多小波

在小波的应用中，由一个实的小波函数的伸缩与平移形成的 $L^2(\mathbf{R})$ 空间的基底，不可能同时具有正交性、紧支性和对称性，而用多个函数的伸缩与平移形成的 $L^2(\mathbf{R})$ 空间的基底就可以解决上述困难。Goodman 等提出多小波的概念，其基本思想是将单小波中由单个尺度函数生成的多分解分析空间，扩展为由多个尺度函数生成。1994 年，Geronimo，Hardin 和 Massopus 构造了著名的 GHM 多小波，它既保持了单小波所具有的良好的时域与频域的局部化特性，又克服了单小波的缺陷，将实际应用中十分重要的光滑性、紧支性、对称性、正交性完美地结合在一起。

5.2.1　多小波多分辨分析

和单小波一样，多小波变换也是在多分辨率分析的基础上建立起来的，不同的是，单小波只有一个尺度函数，而多小波有多个尺度函数。下面对比单小波，简单介绍一下多小波。

1. 单小波

(1) 只有一个尺度函数 $\phi(t)$。

(2) $\phi(t)$ 经平移得到的 $\phi(t-k)$ 线性无关且生成一空间 V_0。

(3) $\phi(t-k)$ 经伸缩得到的 $\phi(2^j t-k)$ 生成空间 V_j，$j\in\mathbf{Z}$，且有：

$$\cdots V_2\subset V_1\subset V_0\subset V_{-1}\subset V_{-2}\cdots$$

$$\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j=L^2(\mathbf{R}),\quad \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j=\{0\}$$

(4) 有一个小波函数 $\psi(t)$，经平移得到 $\psi(t-k)$ 生成空间 W_0，且有：

$$V_{-1}=V_0\oplus W_0$$

2. 多小波

(1) 有 N 个尺度函数 $\phi_1(t),\phi_2(t),\cdots,\phi_N(t)$，可用 $\boldsymbol{\Phi}(t)=[\phi_1(t),\cdots,\phi_N(t)]^{\mathrm{T}}$ 表示。

(2) 尺度函数平移得 $\phi_1(t-k),\phi_2(t-k),\cdots,\phi_N(t-k)$，生成一空间 V_0。如果 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 满足 $[\phi_i(\cdot-k),\phi_j(\cdot-l)]=\delta_{i,j}\delta_{k,j}$，$0\leqslant i,j\leqslant N-1$，称 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为正交多尺度函数。

(3) 和尺度函数对应有 N 个小波函数 $\boldsymbol{\Psi}(t)=[\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_N(t)]^T$，小波函数平移得 $\psi_1(t-k),\psi_2(t-k),\cdots,\psi_N(t-k)$，生成一空间 W_0。若有 $\langle\psi_i(\cdot-k),\psi_j(\cdot-l)\rangle=\delta_{i,j}\delta_{k,j}$，$0\leqslant i,j\leqslant N-1$，则称 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为正交多小波函数。

(4) 类似单小波的情形，有二尺度差分方程：

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\sum_k H_k\boldsymbol{\Phi}(2t-k)$$

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=\sum_k G_k\boldsymbol{\Phi}(2t-k)$$

H_k、G_k 是 $N\times N$ 矩阵。

(5) 通常有 $\langle\phi_i(\cdot-k),\psi_j(\cdot-l)\rangle=0$，即 $W_0\perp V_0$，此时和单小波中类似，对 $\forall f(t)\in V_0$，可分解为

$$\begin{aligned}f(t)&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}C_k^{(0)\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t-k)\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}C_k^{(j_0)\mathrm{T}}2^{j_0/2}\boldsymbol{\Phi}(2^{j_0}t-k)+\sum_{j_0\leqslant j<0}\sum_{k\in\mathbf{Z}}D_k^{(j)\mathrm{T}}2^{j/2}W(2^jt-k)\end{aligned}$$

式中

$$C_k^{(j)}=[c_{0,k}^{(j)},c_{1,k}^{(j)},\cdots,c_{N-1,k}^{(j)}]^{\mathrm{T}}$$

$$D_k^{(j)}=[d_{0,k}^{(j)},d_{1,k}^{(j)},\cdots,d_{N-1,k}^{(j)}]^{\mathrm{T}}$$

将正交单小波中的分析与重构算法推广至正交多小波，可以得到：

分解过程

$$C_k^{(j-1)}=\sum_{n=0}^{N-1}H_nC_{2k+n}^{(j)},\quad D_k^{(j-1)}=\sum_{n=0}^{N-1}G_nC_{2k+n}^{(j)},\quad j,k\in\mathbf{Z}\tag{5.2.1}$$

重构过程

$$C_k^{(j)}=\sum_k H_{n+2k}^{\mathrm{T}}C_k^{(j-1)}+\sum_k G_{n+2k}^{\mathrm{T}}D_k^{(j-1)}\tag{5.2.2}$$

5.2.2 正交多小波

首先给出正交多小波的定义。

定义 5.2.1 r 重多尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}(x)=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r)^{\mathrm{T}}$ 称为是正交的，如果满足

$$\langle\boldsymbol{\Phi}(\cdot),\boldsymbol{\Phi}(\cdot-n)\rangle=\delta_{0,n}I_r,n\in\mathbf{Z}\tag{5.2.3}$$

其中 $\boldsymbol{I}_r$ 是 r 阶单位矩阵，称 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 生成的小波函数 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 是正交的，如果满足

$$\langle\boldsymbol{\Phi}(\cdot),\boldsymbol{\Psi}(\cdot-n)\rangle=\langle\boldsymbol{\Psi}(\cdot),\boldsymbol{\Phi}(\cdot-n)\rangle=0\tag{5.2.4}$$

$$\langle\boldsymbol{\Psi}(\cdot),\boldsymbol{\Psi}(\cdot-n)\rangle=\delta_{0,n}I_r,n\in\mathbf{Z}\tag{5.2.5}$$

其中 0 为 $r\times r$ 阶零矩阵。

GHM 正交多小波开始是用分形插值的方法构造出来的，它具有比较好的性质，然而，用同样的方法构造多小波相当麻烦，且计算量很大，难以广泛使用，于是，Chui 和 Lian[32] 研究了多小波的正交性、紧支撑性、对称性和插值性等，利用对称性构造出了支撑在[0,2]和[0,3]上二重多尺度函数和多小波，并不用分形插值的方法重构了 GHM 多小波。

下面是几个经典的多小波系统：

(1) GHM 多小波系统：J. Geronimo, D. Hardin, P. Massopust 用分形插值构成，有两个尺度函数和两个小波，对应的两尺度系数矩阵和小波系数矩阵分别为

$$H(0)=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5}\\ -\frac{1}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10}\end{bmatrix},H(1)=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0\\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix},H(2)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10}\end{bmatrix}$$

$$H(3)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\frac{2}{10\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix},G(0)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10}\\ \frac{1}{10} & -\frac{3\sqrt{2}}{10}\end{bmatrix},G(1)=\begin{bmatrix}\frac{9}{10\sqrt{2}} & -1\\ -\frac{9}{10} & 0\end{bmatrix}$$

$$G(2)=\begin{bmatrix}\frac{9}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10}\\ \frac{9}{10} & -\frac{3\sqrt{2}}{10}\end{bmatrix},G(3)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{10\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{10} & 0\end{bmatrix}$$

该小波系统具有以下良好的性质：

① 尺度函数和小波的支撑区间分别为[0,1]和[0,2]；

② 尺度函数对称，小波构成对称和反对称；

③ 尺度函数的所有平移都是正交的；

④ 该系统有 2 阶逼近阶。

(2) 系数正交对称且逼近阶为 3 的 Chui-Lian[32] 多小波，尺度系统矩阵分别为

$$H(0)=\begin{bmatrix}\frac{10-3\sqrt{10}}{40} & -\frac{5\sqrt{6}-2\sqrt{15}}{40}\\ \frac{5\sqrt{6}+7\sqrt{15}}{40} & \frac{15-3\sqrt{10}}{40}\end{bmatrix}$$

$$H(1)=\begin{bmatrix}\frac{30+3\sqrt{10}}{40} & \frac{5\sqrt{6}-2\sqrt{15}}{40}\\ -\frac{5\sqrt{6}+7\sqrt{15}}{40} & \frac{15-3\sqrt{10}}{40}\end{bmatrix}$$

$$H(2)=\begin{bmatrix}\frac{30+3\sqrt{10}}{40} & -\frac{5\sqrt{6}-2\sqrt{15}}{40}\\ \frac{5\sqrt{6}+7\sqrt{15}}{40} & \frac{15-3\sqrt{10}}{40}\end{bmatrix}$$

$$H(3)=\begin{bmatrix}\frac{10-3\sqrt{10}}{40} & -\frac{5\sqrt{6}-2\sqrt{15}}{40}\\ -\frac{5\sqrt{6}-7\sqrt{15}}{40} & \frac{5+3\sqrt{10}}{40}\end{bmatrix}$$

而

$$\boldsymbol{\Psi}(x)=G_0\boldsymbol{\Phi}(2x)+G_1\boldsymbol{\Phi}(2x-1)+G_2\boldsymbol{\Phi}(2x-2) \tag{5.2.6}$$

其中

$$G_0=DH_0, G_1=-D^{-1}H_1, G_2=DH_2$$

$$D=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{2^1-1}},\frac{1}{\sqrt{2^2-1}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{2^r-1}}\right)$$

(3) Daubechies 正交多小波的两尺度系数矩阵和小波系数矩阵

$$H(0)=\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{4} & \frac{4+\sqrt{3}}{4}\\ 0 & \end{bmatrix}, H(1)=\begin{bmatrix}\frac{4-\sqrt{3}}{4} & \frac{1-\sqrt{3}}{4}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{4} & \frac{4+\sqrt{3}}{4}\end{bmatrix}, H(2)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{3-\sqrt{3}}{4} & \frac{1-\sqrt{3}}{4}\end{bmatrix}$$

$$G(0)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}-1}{4} & \frac{3-\sqrt{3}}{4}\\ 0 & 0\end{bmatrix}, G(1)=\begin{bmatrix}-\frac{3+\sqrt{3}}{4} & \frac{1-\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}-1}{4} & -\frac{3-\sqrt{3}}{4}\end{bmatrix}, G(2)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{3+\sqrt{3}}{4} & \frac{1+\sqrt{3}}{4}\end{bmatrix}$$

(4) DGHM 正交多小波(Donovan-Gernoimo-Hardin-Massopust)

$$H(0)=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5}\\ -\frac{1}{20\sqrt{2}} & -\frac{3}{20}\end{bmatrix}, H(1)=\begin{bmatrix}\frac{3}{10} & 0\\ \frac{9}{20\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}, H(2)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{9}{20\sqrt{2}} & -\frac{3}{20}\end{bmatrix}$$

$$H(3)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\frac{2}{20\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}, G(0)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{20\sqrt{2}} & -\frac{3}{20}\\ -\frac{1}{20} & \frac{3}{10\sqrt{2}}\end{bmatrix}, G(1)=\begin{bmatrix}\frac{9}{20\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{9}{20} & 0\end{bmatrix}$$

$$G(2)=\begin{bmatrix}\frac{9}{20\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{9}{20} & 0\end{bmatrix}, G(3)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{20\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{20} & 0\end{bmatrix}$$

5.2.3 多小波的构造

对多小波的构造这里只作简单介绍。从信号处理的角度看,

$$\hat{H}(\omega)=\sum_k H_k e^{-j\omega k}, \hat{G}(\omega)=\sum_k G_k e^{-j\omega k}$$

是与尺度函数和小波函数对应的矢量滤波器。多小波的构造通常可转化为 $N\times N$ 矢量滤波器矩阵系数 $\{H_k,G_k\}_{k=0}^{N-1}$ 的求解。与单小波相比,一方面,矩阵中元素的增多,提供了更大的自由度与灵活性,使得相应的尺度函数、小波函数可同时满足对称性和正交性。另一方面,由于矩阵中的运算要比实数中烦琐,这又使得多小波的构造明显比单小波困难。

GHM 多小波是采用复杂的分形插值(fractal interpolation)方法得到的。在此基础上,Strela[33,34]等给出了用二尺度相似变换法来构造光滑、紧支、正交、对称的尺度函数和小波函数的具体步骤。而 Rieder 则研究了如何把多小波的构造转换为线性方程组的求解问题。

此后，从实际应用的角度出发，Lebrun[35]等提出“平衡”这一新概念，并给出了设计平衡多小波的初步方法。所谓“平衡”，是指$[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$为$\hat{H}(\omega)$的特征向量。这样，常数矢量信号通过$\hat{H}(\omega)$后仍为常数信号，这一性质在图像处理的应用中相当重要。另外，Jiang[36]引入了多小波的时频分辨率概念及计算方法，并以尺度函数与小波函数时频分辨率之和最小为目标，构造了$N=2$时，长度为$3,\cdots,7$的对称-反对称多小波。这使得多小波的构造有了较好的准则，也为以后的研究奠定了基础。

第6章 基于MATLAB的小波分析

MATLAB 是美国 Mathworks 公司的产品，是一个优秀的工程计算和仿真软件。MATLAB 是矩阵(Matrix)和实验室(Laboratory)的缩写，其强大的科学计算与可视化功能、简单易用的开放式可扩展环境以及多达 30 多个面向不同领域而扩展的工具箱(Toolbox)支持，使得 MATLAB 在许多学科领域中成为计算机辅助设计与分析、算法研究和应用开发的基本工具和首选平台。

MATLAB 小波分析工具箱是在 MATLAB 中实现各种小波变换的基础。MATLAB 小波分析工具箱中提供了两种处理方式，即命令行和图形界面。命令行提供了灵活的处理方式，而且可以和 MATLAB 的强大接口功能连接，使用户方便地导出各种小波工具。而图形界面方式(GUI)则具有操作简便、界面友好的特点。

本章简要介绍 MATLAB 小波分析工具箱的小波分析函数以及面向对象设计方法。

6.1 小波分析中的通用函数

MATLAB 小波分析工具箱提供的通用小波变换函数如表 6.1 所示。利用这些函数，用户可以实现利用与小波相关的滤波器组进行信号的插值和采样、计算小波函数和尺度函数以及小波管理等功能。

表 6.1 通用小波变换函数

函数名	说明	函数名	说明
biorfilt	双正交小波滤波器组	scal2frq	尺度对应频率
centfrq	计算小波中心频率	wavefan	尺度函数
dyaddown	二元采样	wavefan2	二维尺度函数
dyadup	二元插值	wavemngr	小波管理
intwave	积分小波函数	wfilters	小波滤波器组
orthfilt	正交小波滤波器组	wmaxlev	最大小波分析尺度
qmf	镜像二次滤波器		

1. biorfilt

功能:双正交小波滤波器组。

格式:① [Lo-D,Hi-D,Lo-R,Hi-R] = biorfilt(DF,RF)

② [Lo-D1,Hi-D1,Lo-R1,Hi-R1,Lo-D2,Hi-D2,Lo-R2,Hi-R2] = biorfilt(DF,RF,'8')

说明:该函数可以产生与双正交小波相关联的 4 个或 8 个滤波器组,DF 为分解滤波器,RF 为重构滤波器。格式①用来计算与由 DF,RF 所指定的双正交小波相关联的 4 个滤波器,Hi-R 为重构高通滤波器。格式②返回 8 个滤波器,前 4 个与分解小波相关,后 4 个与重构小波相关。

对于一个子带滤波器,由于它们不满足严格对称和精确重构的条件,所以一个 FIR 滤波器在构造正交小波时存在一些不可避免的缺点。因此就必须对小波的正交性作出让步,改用双正交小波,即

用 ψ 小波进行分解,对于一个信号 s,其分解系数为

$$\tilde{c}_{j,k} = \int s(x)\dot{\psi}_{j,k}(x)\mathrm{d}x$$

用 ψ 小波进行重构,即

$$s = \sum_{j,k} \tilde{c}_{j,k}\psi_{j,k}$$

两个小波之间存在着如下的关系:

$$\int \bar{\psi}_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad j \neq j';k \neq k'$$

$$\int \phi_{0,k}(x)\phi_{0,k'}(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq k'$$

举例:

```
% 计算与 bior3.5 相关联分解滤波器 DF 和重构滤波器 RF
[RF,DF] = biorwavf('bior3.5');
% 计算所需的 4 个滤波器
[Lo_D,Hi_D,Lo_R,Hi_R] = biorfilt(DF,RF);
subplot(221);stem(Lo_D);
title('分解低通滤波器');grid;
subplot(222);stem(Hi_D);
title('分解高通滤波器');grid;
subplot(223);stem(Lo_R);
title('重构低通滤波器');grid;
subplot(224);stem(Hi_R);
title('重构高通滤波器');grid;
```

输出结果如图 6.1 所示。

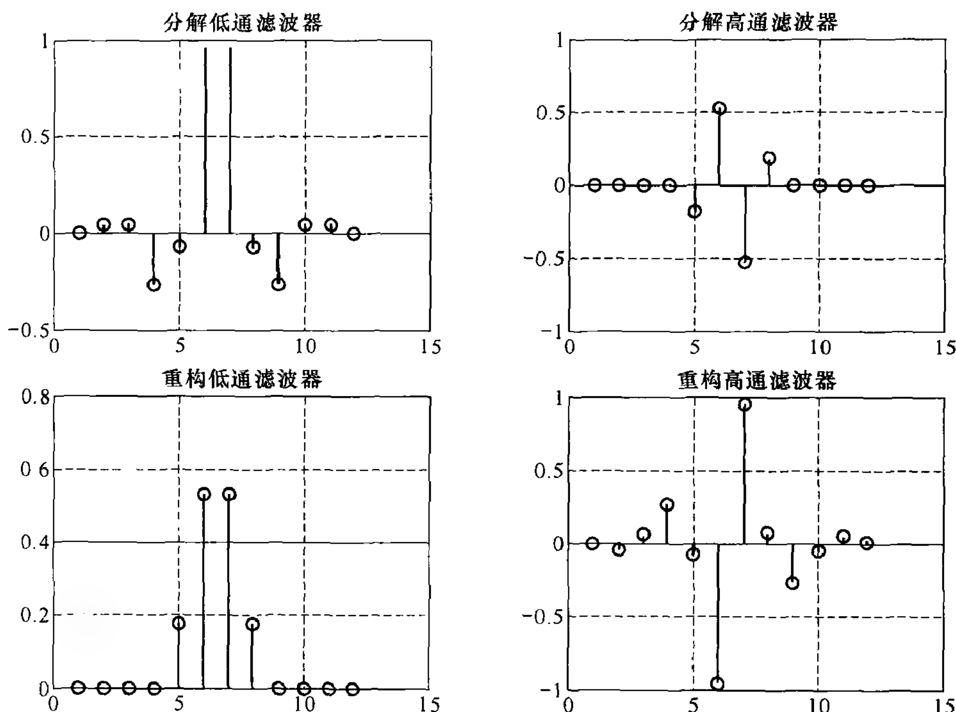


图 6.1　与 bior3.5 相关联的分解滤波器和重构滤波器

2. dyaddown

功能：二元取样。

格式：① Y = dyaddown(X,evenodd)

② Y = dyaddown(X)

③ Y = dyaddown(X,evenodd,'type')

④ Y = dyaddown(X,'type', evenodd)

说明：该函数是用来从向量 X 中每隔一个元素抽取一个元素组成向量 Y。对于格式①，如果 evenodd 为偶数，则进行偶取样，即 Y(k)=X(2k)；如果 evenodd 为奇数，则进行奇取样，即 Y(k)=X(2k+1)，如果省略 evenodd 的值（即格式②），则 evenodd=0，Y(k)=X(2k)。对于格式③、格式④的情况，X 是一个矩阵，如果 type=c，则抽取矩阵 X 偶（或奇）数列，如果 type=r，则抽取矩阵 X 偶（或奇）数行，如果 type=m，则抽取矩阵 X 位于偶（或奇）数行和偶（或奇）数列的元素。

举例：

```
s = 1:10                    % 定义一个元素由 1 到 10 组成的向量 s
dse = dyaddown(s)           % 进行偶数序列抽取
 % dse = dyaddown(s,0))     % 进行偶数序列抽取
dso = dyaddown(s,1)         % 进行奇数序列抽取
a = [1,2,3,4;5,6,7,8;9,10,11,12;13,14,15,16]    % 定义一个矩阵 a
dar = dyaddown(a,0,'r')     % 抽取矩阵 a 的偶数行
dac = dyaddown(a,1,'c')     % 抽取矩阵 a 的奇数列
dam = dyaddown(a,0,'m')     % 抽取矩阵 a 的偶数行和偶数列
```

输出结果：

```
s =
    1    2    3    4    5    6    7    8    9    10
dse =
    2    4    6    8    10
dso =
    1    3    5    7    9
a =
    1    2    3    4
    5    6    7    8
    9    10   11   12
    13   14   15   16
dar =
    5    6    7    8
    13   14   15   16
dac =
    1    3
    5    7
    9    11
    13   15
dam =
    6    8
    14   16
```

3. dyadup

功能：二元插值。

格式：① Y = dyadup(X,evenodd)

② Y = dyadup(X)

③ Y = dyadup(X,evenodd,'type')

④ Y = dyadup(X,'type', evenodd)

说明：该函数实现从向量 X 中每隔一个元素填充一个 0 元素组成向量 Y，在小波重构算法中非常有用。对于格式①，如果 evenodd 为偶数，则进行偶插值，即 Y(2k－1)＝X(k)，Y(2k)＝0；如果 evenodd 为奇数，则进行奇插值，即 Y(2k－1)＝0，Y(2k)＝X(k)；如果省略 evenodd 的值(即格式②)，则 evenodd＝0，Y(2k－1)＝X(k)，Y(2k)＝0。对于格式③、格式④的情况，X 是一个矩阵，如果 type＝c，则插值矩阵 X 偶(或奇)数列，如果 type＝r，则插值矩阵 X 偶(或奇)数行，如果 type＝m，则在矩阵 X 偶(或奇)数行和偶(或奇)数列的位置插入 0 值。

举例：

```
s = 1:5 % 定义一个元素由 1～5 组成的向量 s
use = dyadup(s,0) % 进行偶数序号插值
uso = dyadup(s,1) % 进行奇数序号插值
a = [1,2;3,4;5,6;7,8] % 定义一个矩阵 a
```

```
uar = dyadup(a,0,'r') % 插值矩阵 a 的偶数行
uac = dyadup(a,1,'c') % 插值矩阵 a 的奇数列
uam = dyadup(a,0,'m') % 插值矩阵 a 的偶数行和偶数列
```

输出结果：

```
s =
    1    2    3    4    5
use =
    1    0    2    0    3    0    4    0    5
uso =
    0    1    0    2    0    3    0    4    0    5    0
a =
    1    2
    3    4
    5    6
    7    8
uar =
    1    2
    0    0
    3    4
    0    0
    5    6
    0    0
    7    8
uac =
    0    1    0    2    0
    0    3    0    4    0
    0    5    0    6    0
    0    7    0    8    0
uam =
    1    0    2
    0    0    0
    3    0    4
    0    0    0
    5    0    6
    0    0    0
    7    0    8
```

4. wavefun

功能：小波函数和尺度函数。

格式：① [phi,psi,Xval] = wavefun('wname',iter)

② [phi1,hsi1,phi2,psi2,Xval] = wavefun('wname',iter)

③ [psi,Xval] = wavefun('wname',iter)

④ wavefun('wname',a,b)

说明：该函数用来返回小波函数 ψ 和相应的尺度函数(在尺度函数存在的情况下)的近似值。正整数 iter 决定了反复计算的次数，从而确定了近似值的精确程度。

- 对于一个正交小波，格式①返回尺度函数和小波函数，X 在支撑空间上有 2^{iter} 个点。
- 对于一个双正交小波，格式②返回分别用于分解的尺度函数(ϕ_1)和小波函数(ψ_1)以及重构的尺度函数(ϕ_2)和小波函数(ψ_2)。
- 对于一个 Meyer 小波，有：[phi,psi,Xval]=wavefun('wname',iter)。
- 对于一个 Morlet 小波或 Mexican Hat 小波，有[psi,Xval]=wavefun('wname',iter)。

对于格式④，a，b 是正整数，且格式④等价于 wavefun['wname',max(a,b)]。它计算尺度函数和小波函数的近似值。

举例：

```
iter = 10;wav = 'sym4'; % 设置小波的名字和计算的次数
% 下面用迭代算法计算小波函数ψ的近似值并画出波形图
for I = 1:iter
      [phi,psi,Xval] = wavefun(wav,I);
      plot(Xval,psi);
      hold on
end
title('小波函数 sym4 的近似值(iter 从 1～10)');
hold off
```

输出结果如图 6.2 所示。

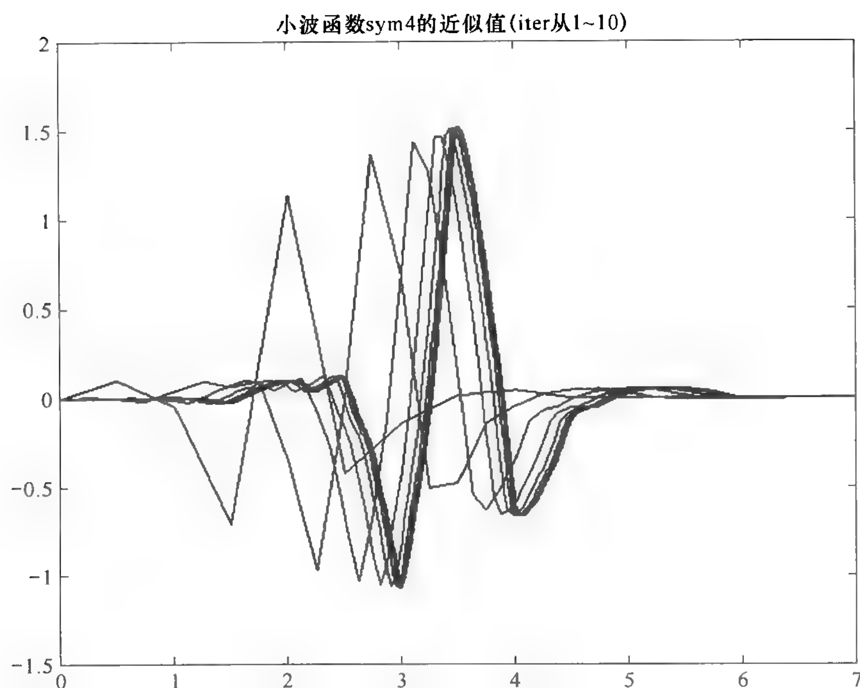


图 6.2　小波函数 sym4 的近似值

5. wavemngr

功能:小波管理。

格式:① wavemngr('create')

② wavemngr('add',Fn,Fsn,Wt,Nums,File)

③ wavemngr('add',Fn,Fsn,Wt,Nums,File,B)

④ wavemngr('del',N)

⑤ wavemngr('restore')

⑥ wavemngr('restore',In2)

⑦ Out1 = wavemngr('read')

⑧ Out1 = wavemngr('read',In2)

⑨ Out1 = wavemngr('read_asc')

说明:该函数是一个用于小波管理的函数,它可以对小波进行新建、添加、删除、存储和读取操作。对于格式①,该函数可以用来创造一个新的小波函数(扩展名为 *.inf 或 *.asc);对于格式②、格式③,该函数可以把一个新的小波函数加到工具箱里,F_n 是 Family Name 的缩写,Fsn 是 Family Short Name 的缩写,W_t 是 Wavelet Type 的缩写。当 $W_t=1$ 时,为正交小波,当 $W_t=2$ 时,为双正交小波,当 $W_t=3$ 时,为带尺度函数的小波,当 $W_t=4$ 时,为不带尺度函数的小波。Nums 为字符串的个数,File 为小波函数名,对于 W_t 为 3、4 的情况,B 为小波有效支撑的上下边界;对于格式④,该函数是用来删除一小波,N 为小波函数名;对于格式⑤、格式⑥,该函数用来保存先前的小波函数;对于格式⑦、格式⑧、格式⑨,该函数是用来读取小波函数。

举例:

```
%下面列出在 MATLAB 中已有的小波函数
wavemngr('read')
```

输出结果:

```
ans =
===================================
Haar                haar
Daubechies          db
BiorSplines         bior
Coiflets            coif
Symlets             sym
Morlet              morl
Mexican_hat         mexh
Meyer               meyr
```

```
%下面列出在 MATLAB 中存在的所有的小波函数
wavemngr('read',1)
```

输出结果:

```
ans =
===================================
```

```
Haar                    haar
=====================================
Daubechies              db
-------------------------------
db1  db2  db3  db4
db5  db6  db7  db8
db9  db10  db**
=====================================
BiorSplines             bior
-------------------------------
bior1.1  bior1.3  bior1.5  bior2.2
bior2.4  bior2.6  bior2.8  bior3.1
bior3.3  bior3.5  bior3.7  bior3.9
bior4.4  bior5.5  bior6.8
=====================================
Coiflets                coif
-------------------------------
coif1  coif2  coif3  coif4
coif5
=====================================
Symlets                 sym
-------------------------------
sym2  sym3  sym4  sym5
sym6  sym7  sym8  sym**
=====================================
Morlet                  morl
=====================================
Mexican_hat             mexh
=====================================
Meyer                   meyr
=====================================
```

6. wmaxlev

功能:计算小波分解的最大尺度。

格式:L = wmaxlev(S,'wname')

说明:wmaxlev 是一维或二维小波函数或小波包的导向函数,它可帮助避开那些不必要的最大尺度值。该函数返回信号或图像的最大分解尺度。

举例:

```
%对于一维信号的长度为 2^10 的情况
s = 2^10;
```

```
w = 'db1';l1 = wmaxlev(s,w)     % 小波函数为 db1 时,计算分解的最大尺度值
w = 'db7';l2 = wmaxlev(s,w)     % 小波函数为 db7 时,计算分解的最大尺度值
```

输出结果:

```
l1 =
    10
l2 =
    6
% 对于二维图像大小为[2^9,2^7]的情况
s = [2^9,2^7];
w = 'db1';l1 = wmaxlev(s,w)     % 小波函数为 db1 时,计算分解的最大尺度值
w = 'db7';l2 = wmaxlev(s,w)     % 小波函数为 db7 时,计算分解的最大尺度值
```

输出结果:

```
l1 =
    7
l2 =
    3
```

6.2 小波函数

MATLAB 小波分析工具箱提供的小波变换函数如表 6.2 所示,它们主要用于产生一些基本的小波函数及其相应的滤波器。

表 6.2　小波函数

函数名	说明	函数名	说明
biorwavf	双正交样条小波滤波器	mexihat	墨西哥帽小波
cgauwavf	复 Gaussian 小波	meyer	Meyer 小波
cmorwavf	复 Morlet 小波	meyeraux	Meyer 小波辅助方程
coifwavf	Coiflet 小波滤波器	morlet	Morlet 小波
dbaux	Daubechies 小波滤波器计算	rbiowavf	反向双正交样条小波滤波器
dbwavf	Daubechies 小波滤波器	shanwavf	复 Shanwavf 小波
fbspwavf	复频域 B-样条小波	symaux	Symlet 小波滤波器计算
gauswavf	Gaussian 小波	symwavf	Symlet 小波滤波器

1. mexihat

功能:墨西哥帽小波。

格式:[PSI,X] = mexihat(LB,UB,N)

说明:该函数返回一个有效支撑为[LB,UB],x 有 N 个均匀分布点的墨西哥帽小波,其中,返回向量 PSI 为 $\psi(x)$的值,向量 X 为 x 点的取值。小波函数为

$$\psi(x)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-\frac{1}{4}}\right)(1-x^2)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$

它是高斯概率密度函数的二阶导数。

举例：

```
% 定义有效支撑的长度
lb = - 5;ub = 5;
% 定义 x 在有效支撑上均匀点的个数
n = 1 000;
% 下面计算并画出墨西哥帽小波
% 其中,x 为在有效支撑上均匀分布的点,psi 为对应的ψ(x)值
[psi,x] = mexihat(lb,ub,n);
% 画出小波的波形
plot(x,psi);
title('Mexihat 小波');
```

输出结果如图 6.3 所示。

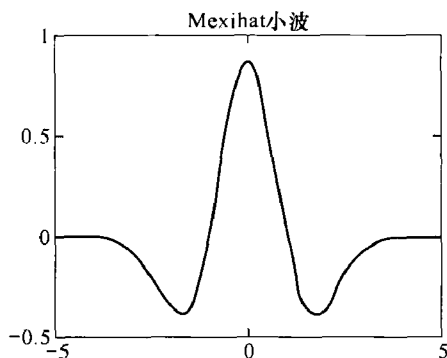


图 6.3 墨西哥帽小波

2. meyer

功能：Meyer 小波。

格式：① [PHI,PSI,T] = meyer(LOWB,UPPB,N)

② [PHI,T] = meyer(LOWB,UPPB,N,'phi')

③ [PSI,T] = meyer(LOWB,UPPB,N,'psi')

说明：格式①返回 Meyer 小波在有效支撑为[LOWB,UPPB]，在有效支撑上有 N 个均匀分布点的 Meyer 尺度函数，N 为 2 的正数次幂。输出参数为尺度函数 phi(即 ϕ)和小波函数 psi(即 ψ)。

3. morlet

功能：Morlet 小波。

格式：[PSI,X] = morlet(LB,UB,N)

说明：该函数返回一个有效支撑为[LB,UB]，在有效支撑上有 N 个均匀分布点的 Morlet 小波。输出参数为在 X 上的 psi(即 ψ)函数的值。该函数具有的有效支撑为[−4,4]。

$$\psi(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\cos 5x$$

举例：

```
lb = -4;ub = 4;n = 1 000;
% 计算并画出 Morlet 小波函数
[psi,x] = morlet(lb,ub,n);
plot(x,psi);title('Morlet 小波');
```

输出结果如图 6.4 所示。

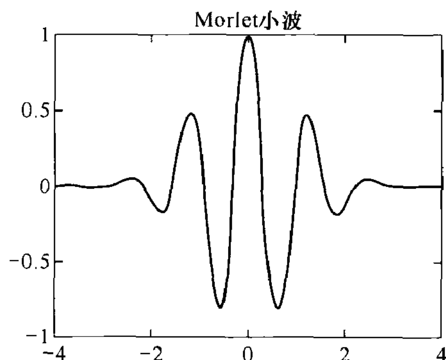


图 6.4　Morlet 小波

6.3　一维小波变换的 MATLAB 实现

一维小波变换包括一维连续小波变换和一维离散小波变换。

6.3.1　一维连续小波变换函数

MATLAB 中的一维连续小波函数如表 6.3 所示。利用它们用户可以由某一模式构造用于连续小波变换的小波函数，还可以进行一维连续实小波或复小波变换。

表 6.3　一维连续小波变换函数

函数名	说明	函数名	说明
cwt	一维连续实小波或复小波变换	pat2cwav	由某一模式构造小波

cwt

功能：一维连续小波变换。

格式：① coefs = cwt(s,scales,'wname')

　　② coefs = cwt(s,scales, 'wname', 'plot')

说明：该函数为一维连续小波分析函数，其中 coefs 为连续小波变换后的返回系数 $WT_f(a,b)$ 矩阵，系数以行方向存储在矩阵中。$WT_f(a,b)$ 定义为：

$$WT_f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{R}} f(t)\, \overline{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) \mathrm{d}t$$

因为 $f(t)$ 是一个离散的信号，所以我们可以将信号用 $f(k)$ 的形式表示，$k=1$ 到length(f)，所以对于一具体的尺度 a，cwt 将计算 b 从 1 到 length(f) 所对应的每一个系数值 $WT_f(a,b)$。

s 为待分析的信号，在计算中通常是以离散的形式给出，如在 MATLAB 自身所带有的

noissin 信号等。scales 为连续小波变换的尺度向量，wname 为小波函数名。如果尺度为离散的值 a1，a2，a3，…，则尺度向量 scale 可以表示为[a1，a2，a3，…]的形式，值与值之间用逗号或空格隔开；倘若尺度向量由起始尺度 amin、终止尺度 amax、尺度步长 astep 三者组成，则尺度向量 scale 可以表示为[amin：step：amax]的形式（中括号“[]”此时可省略）；倘若尺度向量同时包括上面两种情况，则把离散尺度写在前面，步长表示方式写在后面，如[a1，a2，a3，amin：astep：amax]。wname 是小波函数名，如 haar，db1，db2，meyer 等。coefs 是指返回系数矩阵（小波变换系数），矩阵的行数为小波变换中尺度的个数，列数为信号采样点数的个数，如 noissin 信号的采样点个数为 100，矩阵第一行的值对应第一个尺度变换后的系数，第二行的值对应第二个尺度变换后的系数，以后依此类推。对于格式②，“plot”是用来画出小波变换后系数的图形，在图形中，系数的大小是以灰度的深浅来表示，颜色越深，则变换后的系数 $WT_f(a,b)$ 越大。

另外，(1)尺度必须为正实数；(2)逗号可以换成空格的形式；(3)当尺度步长 astep 没有显式给出时，则表示 astep 取默认步长 1。

举例：对 MATLAB 中所有的 noissin 信号进行连续小波变换，尺度 a 为 0.48，1.0，1.2，2，4，6，8，10，小波函数用 db3，请求出连续小波变换后的系数。

程序：

```
load noissin;              % 装载信号
s = noissin(1 : 100);
ls = length(s);            % 计算信号点的个数 ls
 % 对 s 进行一维连续小波变换，把返回系数存到矩阵 w 中
w = cwt(s,[0.48,1.0,1.2,2:2:10],'db3','plot')
Xlabel('时间');
Ylabel('变换尺度');
title('对应于尺度 a = 0.48,1.0…小波变换系数的绝对值');
```

输出结果如图 6.5 所示。

执行程序后，返回矩阵为一个 9×100 矩阵。变换后，不同尺度对应的灰度值图如图6.5所示。

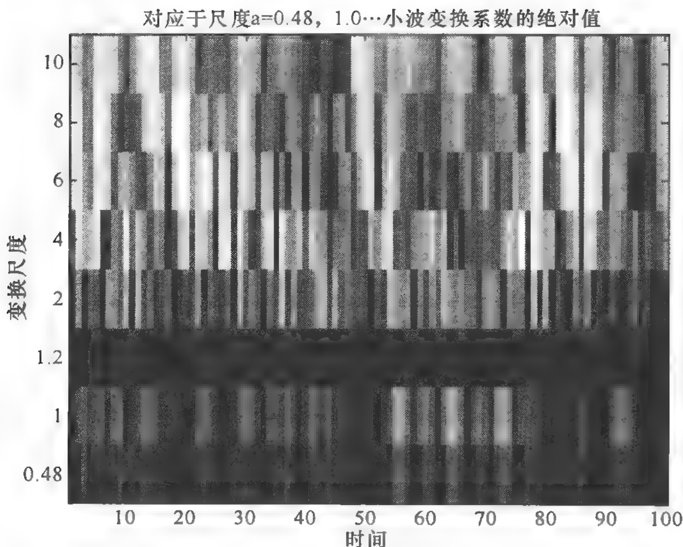


图 6.5 小波变换系数的绝对值对应的灰度值图

6.3.2 一维离散小波变换函数

MATLAB 小波分析工具箱提供的一维离散小波变换函数如表 6.4 所示。利用这些函数，用户可以进行一维小波单尺度和多尺度分解、提取多尺度小波变换系数、进行小波重构等。

表 6.4 一维离散小波变换函数

函数名	说明	函数名	说明
appcoef	提取一维小波变换的低频系数	upwlev	一维小波分解的单尺度重构
detcoef	提取一维小波变换的高频系数	wavedec	多尺度一维小波分解
dwt	单尺度一维离散小波变换	waverec	多尺度一维小波重构
dwtmode	离散小波变换的延拓模式	wenergy	一维小波分解的能量
idwt	单尺度一维离散小波逆变换	wroef	小波分解结构的低频或高频重构
upcoef	一维小波系数的直接重构		

1. dwt

功能：单尺度一维离散小波变换。

格式：① [cA,cD] = dwt(X,'wname')

② [cA,cD] = dwt(X,Lo_D,Hi_D)

说明：该函数用于进行一维离散小波分解，X 为被分析的离散信号，wname 为分解所用到的小波函数，Lo_D、Hi_D 为分解滤波器，cA 和 cD 分别为返回的低频系数和高频系数向量，它们长度相等且为：length(x)/2[当 length(x)为偶数时]或[length(x)+1]/2[当 length(x)为奇数时]。

如果令 l_x=length(x)，l_f=length(Lo_R)，则有：length(cA)=length(cD)=floor($lx+lf-2$)/2

举例：

```
load noissin;       % 装载原始一维信号
s = noissin(1 : 1000);
% 画出原始信号的波形
subplot(311);plot(s);
title('原始信号');
% 下面用 haar 小波函数进行一维离散小波变换
[ca1,cd1] = dwt(s,'haar');
subplot(323);plot(ca1);
Ylabel('haar(ca1)');
subplot(324);plot(cd1);
Ylabel('haar(cd1)');
% 给定一个小波 db2,计算与之相关的分解滤波器
[Lo_D,Hi_D] = wfilters('db2','d');
% 用分解滤波器 Lo_D,Hi_D 计算信号 s 的离散小波分解系数
[ca2,cd2] = dwt(s,Lo_D,Hi_D);
subplot(325);plot(ca2);
Ylabel('db2(ca2)');
subplot(326);plot(cd2);
```

```
Ylabel('db2(cd2)');
```

输出结果如图 6.6 所示。

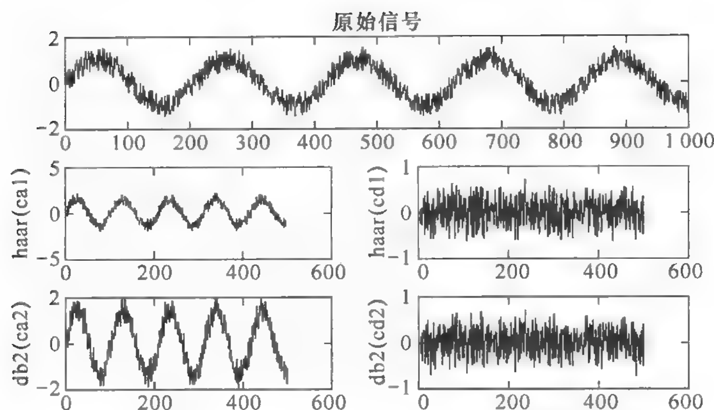


图 6.6　noissin 信号的一维离散小波变换

2. idwt

功能：单尺度一维离散小波逆变换。

格式：① X = idwt(cA,cD,'wname')

② X = idwt(cA,cD,Lo_R,Hi_R)

③ X = idwt(cA,cD,'wname',L)

④ X = idwt(cA,cD, Lo_R,Hi_R,L)

说明：该函数用于单尺度一维离散小波变换的重构。对于格式①、格式③，它是用小波函数进行重构，对于格式②、格式④，它是用重构滤波器进行重构，其中，cA 和 cD 的长度是相等的，Lo_R 和 Hi_R 的长度是相等的，返回系数 X 为重构后信号的向量。如果 cA 的长度为 l_a，Lo_R 的长度为 i_f，则 X 的长度为 length(X)=$2*l_a-l_f+2$。对于格式③、格式④，则是对信号中间长度为 L 的部分进行重构，L<$2*l_a-l_f+2$。

运用重构滤波器进行重构的步骤可以用图 6.7 方框图描述。

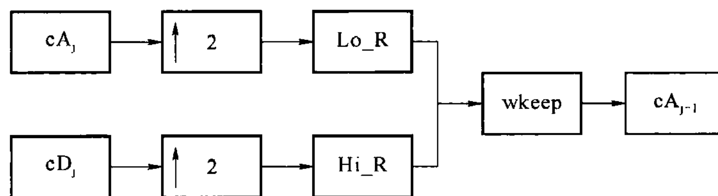


图 6.7　用重构滤波器进行重构的方框图

其中，[↑2]表示向向量奇数索引位置处插入 0 值；[X]表示与滤波器 X 进行卷积运算，X 可以为 Lo_R 或 Hi_R；[wkeep]表示提取向量中间适当的长度。

举例：

［**例 6-1**］

```
load leleccum;        % 装载原始一维信号
s = leleccum(1 : 1 000);
subplot(621);plot(s);
```

```
title('原始信号');
%下面用 db2 小波函数进行一维离散小波变换
[ca,cd] = dwt(s,'db2');
%用小波函数 db2 进行信号的重构
x1 = idwt(ca,cd,'db2');
subplot(625);plot(x1);
title('小波重构');
errx1max = max(abs(s - x1))
errx1 = s - x1;
subplot(626);plot(errx1);
title('小波重构误差');
axis([0,1000, - 2e - 11,2e - 11]);
%产生一个与 db2 相关的重构滤波器
[Lo_D,Hi_D,Lo_R,Hi_R] = wfilters('db2');
%用分解滤波器对信号 s 进行一维小波分解
[ca,cd] = dwt(s,Lo_D,Hi_D);
%用重构滤波器进行信号的重构
x2 = idwt(ca,cd,Lo_R,Hi_R);
subplot(629);plot(x2);
title('滤波器重构');
errx2max = max(abs(s - x2))
errx2 = s - x2;
subplot(6210);plot(errx2);
title('滤波器重构误差');
axis([0,1000, - 2e - 11,2e - 11]);
```

输出结果如图 6.8 所示。

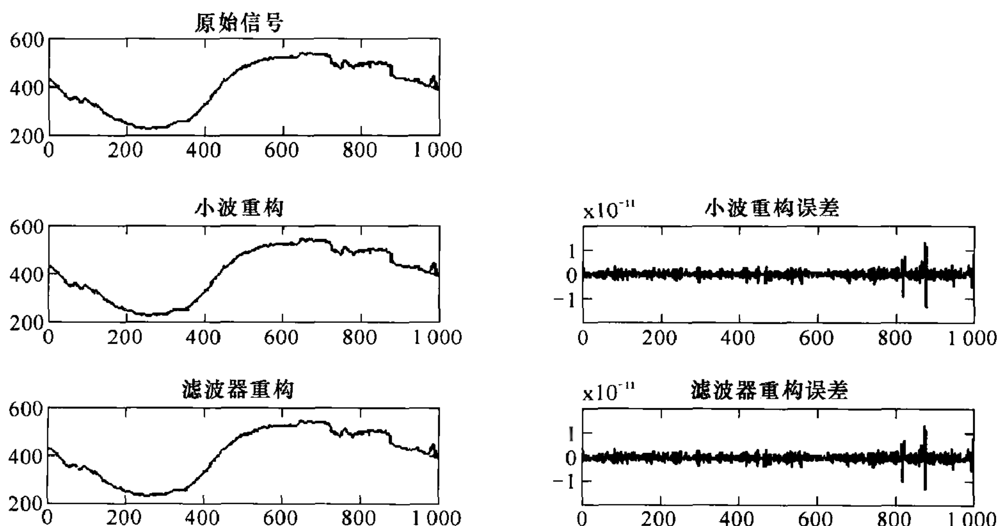


图 6.8　信号 leleccum 的小波重构和滤波器重构

```
errx1max =
       1.2142e - 010
errx2max =
       1.2142e - 010
```

[例 6-2]

```
% 当前扩展模式是补零
% 构造原始一维信号 s
randn('seed',531316785)
s = 2 + kron(ones(1,8),[1  - 1]) + ...
  ((1:16).^2)/32  +  0.2 * randn(1,16);
% 使用 db2 进行单尺度 dwt
[ca1,cd1] = dwt(s,'db2');
subplot(221); plot(ca1);
title(' db2 低频系数');
subplot(222); plot(cd1);
title(' db2 高频系数');
% 进行单尺度离散小波逆变换
ss = idwt(ca1,cd1,'db2');
err = norm(s - ss);         % 检查重构
subplot(212); plot([s;ss]');
title('原始信号和重构信号');
xlabel(['误差的 2 范数 = ',num2str(err)])
% 对于给定的小波,计算两个相关重构滤波器,并直接利用它们进行逆变换
[Lo_R,Hi_R] = wfilters('db2','r');
ss = idwt(ca1,cd1,Lo_R,Hi_R);
```

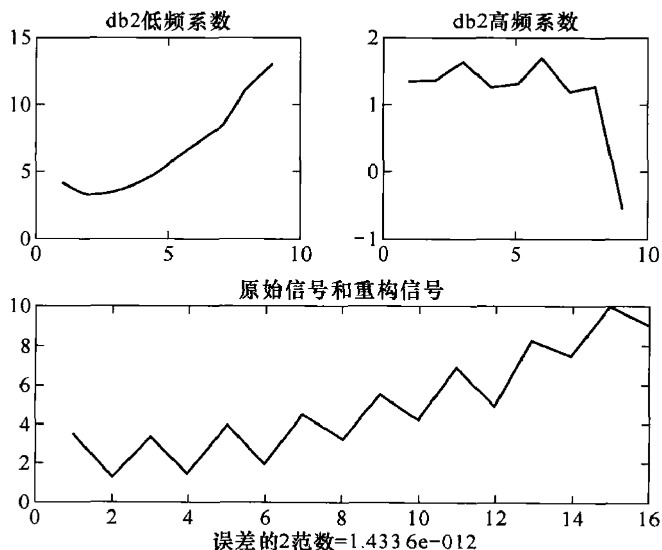


图 6.9　采用小波重构滤波器进行信号重构

从上面的两个例子可以看出，采用小波重构和小波重构滤波器进行重构，其效果基本上是一样的，它们在重构精度上存在着较小的差别。

3. wavedec

功能：多尺度一维小波分解（一维多分辨分析函数）。

格式：① [C,L] = wavedec(X,N,'wname')

② [C,L] = wavedec(X,N,Lo_D,Hi_D)

说明：wavedec 函数用小波或分解滤波器完成对信号 X 的一维多尺度分解，N 为尺度，且是严格的正整数。输出参数 C 是由 [cA_j, cD_j, cD_{j-1}, …, cD1] 组成，L 是由 [cA_j 的长度，cD_j 的长度，cD_{j-1} 的长度，…，cD_1 的长度，X 的长度] 组成。以一个 3 尺度分解为例，其分解结构的组织形式如图 6.10 所示。

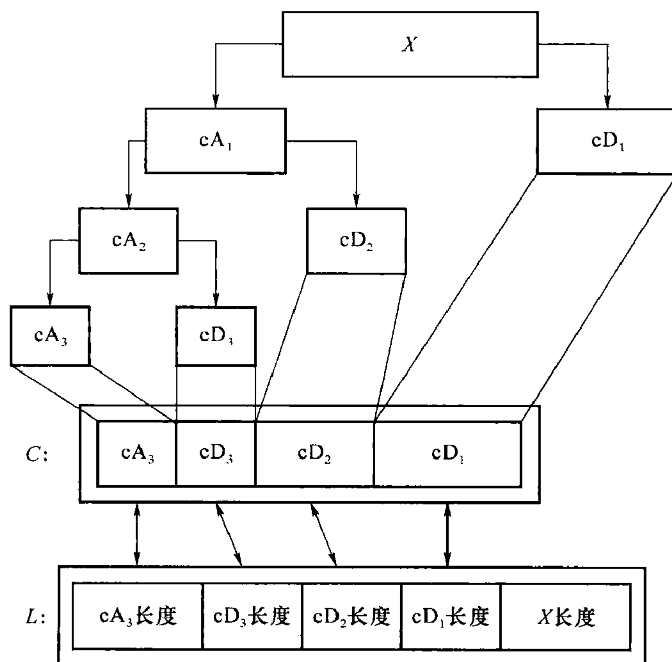


图 6.10 多尺度一维小波分解结构的组织形式

格式②返回如图 6.10 所示的分解结构。

给定一个长度为 N 的信号 S，离散小波分解（DWT）最多可以把信号分解为 $\log_2 N$ 个频率级。第一步分解开始于信号 S，分解后分解系数有两部分组成：低频系数向量 cA_1 和高频系数向量 cD_1，向量 cA_1 是由信号 S 与低通分解滤波器 Lo_D 经过卷积运算得到，向量 cD1 是由信号 S 与高通分解滤波器 Hi_D 经过卷积运算得到，其分解过程如图 6.11 所示。

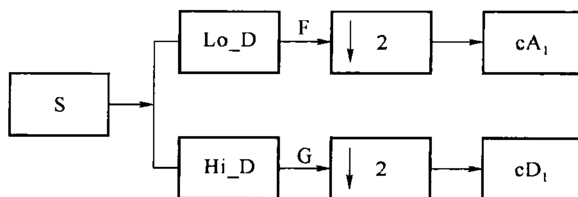


图 6.11 信号 S 的离散小波分解示意图

其中，$\boxed{\downarrow 2}$表示保留向量中标号为偶数的元素（抽取的过程）。

每个滤波器的长度均为 $2N$，如果 n=length(S)，则信号 F 和 G 的长度为：$n+2N-1$，所以系数 cA_1 和 cD_1 的长度为：$\text{floor}\left(\frac{n-1}{2}\right)+N$。

接下来，用同样的方法把低频系数 cA_1 分成两部分，则把上面方框图中的 S 用 cA_1 代替，分解后返回尺度 2 的低频系数 cA_2 和高频系数 cD_2。以此类推，一直分解下去。

举例：

```
load sumsin;s = sumsin;
subplot(611);plot(s);     % 画出原始信号的波形
title('原始信号');
% 用小波函数 db1 对信号进行 3 尺度的小波分解
[c,l] = wavedec(s,3,'db1');
subplot(613);plot(c);     % 画出变换后的波形
title('信号 S 的 3 尺度小波分解结构');
Xlabel('尺度 3 的低频系数和尺度 3、2 和 1 的高频系数');
axis([0,1000,-5,5]);
```

输出结果如图 6.12 所示。

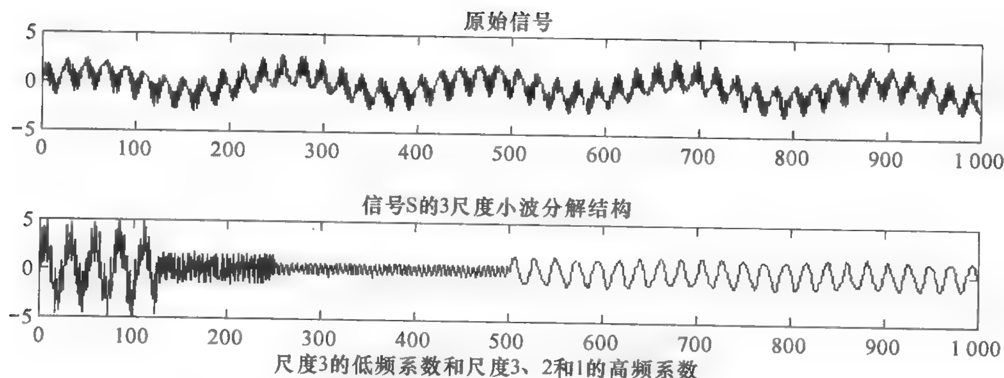


图 6.12　信号 S 的 3 尺度小波分解系数

信号 S 在第 j 层的分解结构为$[cA_j, cD_j, cD_{j-1}, \cdots, cD_1]$，当 $j=3$ 时，分解结构树包含如图 6.13 所示的终端结点。

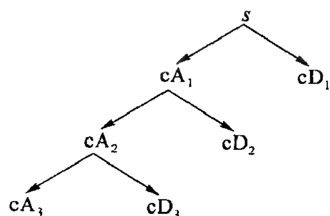


图 6.13　多层分解结构树

4. waverec

功能：多尺度一维小波重构。

格式：① X = waverec(C,L,'wname')

　　　② X = waverec(C,L,Lo_R,Hi_R)

说明：该函数是用指定的小波函数或重构滤波器对小波分解结构$[C,L]$进行多尺度一维小波重构，它是 wavedec 函数的逆函数，即有

X = waverec(wavedec(X,N,'wname'),'wname')

另外，X=waverec(C,L,'wname')与 X=appcoef(C,L,'wname',0)具有等价性。格式①是用小波函数进行重构，格式②是用重构滤波器进行重构。

举例：

```
%装入一个一维信号
load leleccum;s = leleccum(1:3 920);ls = length(s);
subplot(2,1,1);plot(s);
%画出原始信号的波形图
title('原始信号');
%用小波函数 db5 对信号进行 3 尺度分解
[c,l] = wavedec(s,3,'db5');
%在小波分解结构[c,l]的基础上对信号进行重构
a = waverec(c,l,'db5');
subplot(2,1,2);plot(a); %画出重构后的信号波形图
title('重构信号');
err = norm(s - a)
```

输出结果如图 6.14 所示。

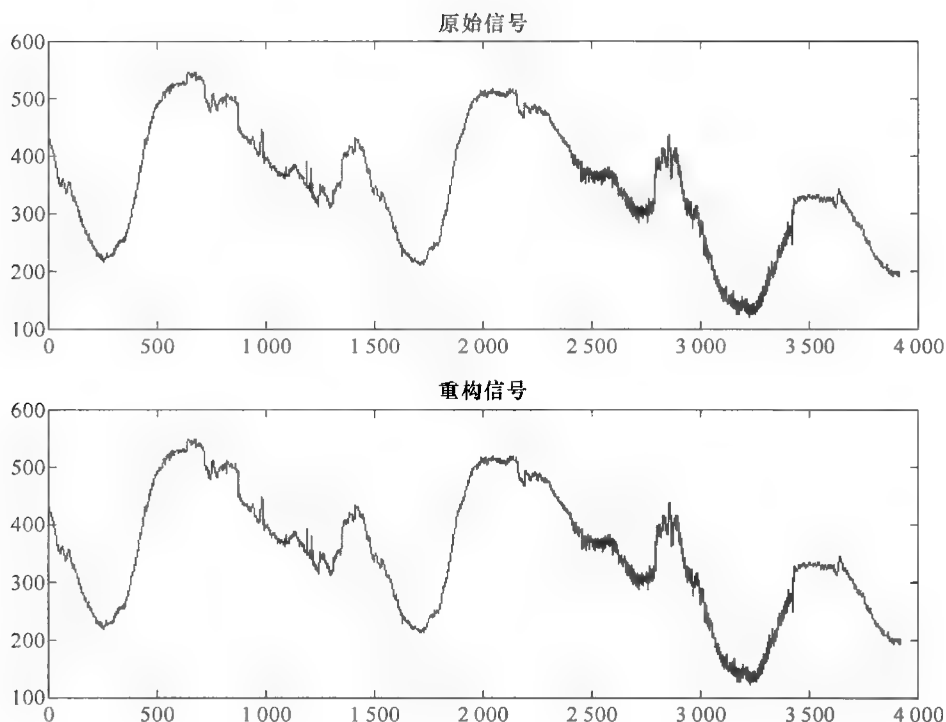


图 6.14　多尺度一维小波重构结果

```
err =
    1.6717e - 009
```

5. appcoef

功能：提取一维小波变换低频系数。

格式：① A = appcoef(C,L,'wname',N)

　　② A = appcoef(C,L,'wname')

③ A = appcoef(C,L,Lo_R,Hi_R)

④ A = appcoef(C,L, Lo_R,Hi_R,N)

说明:该函数是一个一维小波分析函数,它用于从小波分解结构[C,L]中提取一维信号的低频系数,其中,[C,L]为小波分解结构,wname 为小波函数,N 为尺度。格式①计算尺度 N(N 必须为一个正整数且 $0 \leqslant N \leqslant \text{length}(L)-2$)时的一维分解低频系数;格式②用于提取最后一尺度(尺度 $N=\text{length}(L)-2$)的小波变换低频系数;格式③、格式④是用滤波器 Lo_R 和 Hi_R 进行信号低频系数的提取,一般说来,该滤波器是与某一小波函数相关的,通常可由 wfilters 函数得到。返回函数 A 是一个向量,向量的元素个数为 $\text{length}(S)/2^N$。

举例:

```
% 下面装载一维信号
load leleccum;s = leleccum(1:2000);ls = length(s);
subplot(421);plot(s);title('原始信号');
% 尺度为 3,小波函数为 db1 时进行分解
[c,l] = wavedec(s,3,'db1');
% 从小波分解结构[c,l]中提取尺度 1、2 的高频系数
ca1 = appcoef(c,l,'db1',1);
subplot(4,4,5);plot(ca1);
Ylabel('ca1');
ca2 = appcoef(c,l,'db1',2);
subplot(4,8,17);plot(ca2);
Ylabel('ca2');
```

输出结果如图 6.15 所示。

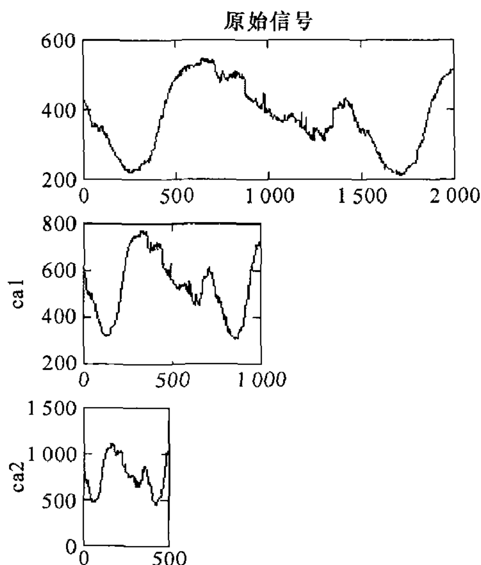


图 6.15　appcoef 函数的运行结果

6. detcoef

功能：提取一维小波变换高频系数。

格式：① D = detcoef(C,L,N)

　　② D = detcoef(C,L)

说明：该函数是一个一维小波分析函数，它与 appcoef 函数相对应，用来计算一维小波变换后的高频系数。格式①提取尺度为 N(N 必须为一个正整数且 $0 \leqslant N \leqslant \text{length}(L)-2$)，分解结构为$[C,L]$的一维分解高频系数；格式②用于提取最后一尺度(尺度 $N=\text{length}(L)-2$)的一维分解高频系数。该函数返回一个向量，向量的元素个数为 $\text{length}(S)/2^N$。

举例：

```
load leleccum;s = leleccum(1:2 000);ls = length(s);
% 画出原始信号的波形图
subplot(421);plot(s);title('原始信号');
% 尺度为 3,小波函数为 db1 时进行分解
[c,l] = wavedec(s,3,'db1');
% 从小波分解结构[c,l]中提取尺度 1、2 的高频系数
cd1 = detcoef(c,l,1);
subplot(445);plot(cd1);
Ylabel('cd1');
cd2 = detcoef(c,l,2);
subplot(4,8,17);plot(cd2);
Ylabel('cd2');
```

输出结果如图 6.16 所示。

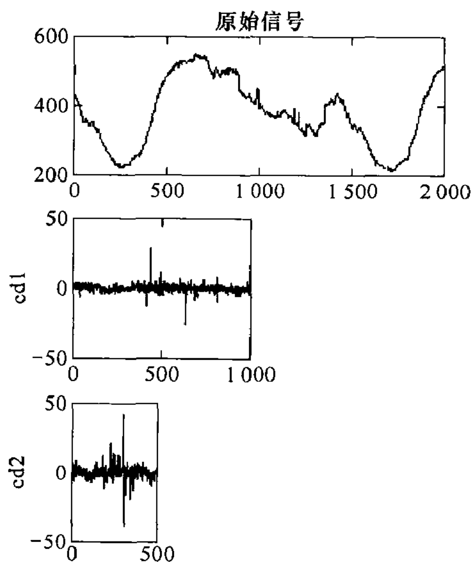


图 6.16　detcoef 函数的运行结果

6.4 二维小波变换的MATLAB实现

二维小波变换在图像的压缩、消噪、边缘提取、识别、分类、融合等领域有广泛的应用。在用MATLAB小波工具箱进行图像处理时，经常要调用图像处理工具箱和信号处理工具箱的函数和命令，同时要特别注意MATLAB所支持的图像类型和数据类型，才能达到预期的效果。

MATLAB支持4种类型的图像，它们分别是RGB真彩色图像、索引图像、灰度图像和二值图像。不同类型的图像实际上是颜色和亮度的不同编码方式。无论什么类型的图像，都表示为数组。MATLAB支持的图像数组元素的数据类型有3种：双精度浮点数、16位整数和8位整数。

RGB图像表示为三维数组 $m\times n\times 3$，实际上是3个 $m\times n$ 的二维数组，分别表示红、绿、蓝三分色的亮度。例如像素(8,5)的三分色的亮度分别存储在(8,5,1)、(8,5,2)和(8,5,3)3个数组元素中。RGB图像的数据类型可以是双精度、16位整型和8位整型。双精度RGB图像数组元素的取值范围在0～1。如数据类型是8位整型，颜色深度为24比特，可表示的颜色多达 16×10^6 种，已非常接近真实世界的色彩，故RGB图像又称真彩色图像。

索引图像包括图像数组与颜色图数组，图像数组是 $m\times n$ 的二维数组，数组元素的值作为像素颜色的索引，颜色图数组是 $c\times 3$ 数组，索引指向颜色图数组的行，查找出像素红、绿、蓝三分量的亮度，不难理解，图像数组元素的值应该是整数。显然，c 值的大小表示了图像颜色的深度，例如 $c=1\,000$，表示图像有1 000种不同的颜色。颜色图数组的数据类型只能是双精度类型，数组元素的取值范围在0～1，颜色图数组的每一行指定出某一单色的红、绿、蓝三分量的亮度。图像数组的数据类型则可以是双精度、16位整型和8位整型。如图像数组的数据类型是双精度型，数组元素的值直接作为查找像素颜色的索引，例如图像数组元素的值为1，查找颜色图数组的第1行，为2则查找颜色图数组的第2行，依此类推。如果图像数组的数据类型是16位整型或8位整型，这时图像数组元素的值可能等于0，而颜色图数组的起始行为第1行，所以必须加上一个等于1的偏移量，即图像数组元素的值加1作为查找像素颜色的索引。例如图像数组元素的值为0，查找颜色图数组的第1行，为1则查找颜色图数组的第2行，依此类推。

灰度图像(或称强度图像)表示为 $m\times n$ 的二维数组，数组元素的值就是相应像素的灰度等级。灰度图像的数据类型可以是双精度、16位整型和8位整型。数组元素的值为0表示相应像素为黑，数组元素的值为1,255或65 535时，表示白。MATLAB在存储灰度图像时没有颜色图，但在显示时有颜色图。

二值图像可以说是一种特殊类型的灰度图像，它只有黑、白两个灰度等级。二值图像的数据类型只能是双精度或8位整型，不可能是16位整型，显然用8位整型更节省存储空间。

MATLAB提供了若干实现图像类型和色度空间互相转换的函数。

数字图像在计算机中是以数据文件的形式存储的，MATLAB支持的图像文件格式包括：BMP(Windows Bitmap)、HDF(Hierarchical Data Format)、JPEG(Joint Photographical Experts Group)、PCX(Windows Paintbrush)、TIFF(Tagged Image File Format)、XWD(X

Windows Dump)。

对于彩色图像,MATLAB 小波工具箱只支持索引图像,所以 RGB 图像在用小波工具箱函数处理之前必须转换成索引图像。如颜色图是平滑的,则小波分解可直接用于索引图像;否则,可以将它转换成颜色图平滑的灰度图像。图像数组元素的值应该是整数,但也允许是非整数。在进行数值计算的过程中,图像数组元素的值为非整数不会带来任何问题,但在显示图像时,小于 1 的数都视为 1,大于 c 的数都视为 c(c 为颜色图数组的行数),在 $1\sim c$ 的非整数四舍五入为最接近的整数。此外,小波分解产生的系数(即离散逼近信号和 3 个方向的离散细节信号)、逼近和细节(经过插值的逼近和细节信号)不再是索引数组。

MATLAB 小波分析工具箱提供的二维离散小波变换函数如表 6.5 所示。利用这些函数,用户可以实现二维小波变换单尺度和多尺度分解、提取多尺度小波变换系数、小波重构、计算小波分解的能量等功能。

表 6.5　二维离散小波变换函数

函数名	说明	函数名	说明
dwt2	单尺度二维离散小波变换	detcoef2	提取二维小波分解的高频系数(即细节分量)
idwt2	单尺度二维离散小波逆变换	wrcoef2	二维小波分解的低频或高频重构
dwtmode	离散小波变换的延拓模式	upcoef2	二维小波分解系数的直接重构
wavedec2	多尺度二维小波分解	upwlev2	二维小波分解的单尺度重构
waverec2	多尺度二维小波变换重构	wenergy2	二维小波分解的能量
appcoef2	提取二维小波分解的低频系数(即近似分量)		

1. dwt2

功能:二维离散小波变换。

格式:
```
[cA,cH,cV,cD] = dwt2(X,'wname')
[cA,cH,cV,cD] = dwt2(X,Lo_D,Hi_D)
```

说明:[cA,cH,cV,cD]=dwt2(X,'wname')使用指定的小波基函数'wname'对二维信号(图像)进行二维离散小波变换。

cA、cH、cV、cD 分别为近似变量、水平细节分量、垂直细节分量和对角细节分量。

[cA,cH,cV,cD]=dwt2(X,Lo_D,Hi_D)使用指定的分解低通和高通滤波器 Lo_D 和 Hi_D 分解信号 X。

举例:对图像做二维小波分解,结果如图 6.17 所示。

```
load woman;
nbcol = size(map,1);
[cA1,cH1,cV1,cD1] = dwt2(X,'db1');
cod_X = wcodemat(X,nbcol);
cod_cA1 = wcodemat(cA1,nbcol);
```

```
cod_cH1 = wcodemat(cH1,nbcol);
cod_cV1 = wcodemat(cH1,nbcol);
cod_cD1 = wcodemat(cD1,nbcol);
dec2d = [cod_cA1,cod_cH1;cod_cV1,cod_cD1];
subplot(1,2,1),imshow(cod_X,[]);
title('量化后的图像');
subplot(1,2,2),imshow(dec2d,[]);
title('二维离散小波分解后的图像');
```



图 6.17 图像的二维离散小波分解

2. idwt2

功能:二维离散小波反变换。

格式:X = idwt2(cA,cH,cV,cD,'wname')

X = idwt2(cA,cH,cV,cD,Lo_R,Hi_R)

X = idwt2(cA,cH,cV,cD,'wname',S)

X = idwt2(cA,cH,cV,cD,Lo_R,Hi_R,S)

说明:X=idwt2(cA,cH,cV,cD,'wname')由信号小波分解的近似信号 cA 和细节信号 cH、cV、cD 经小波反变换重构原信号 X。

X=idwt2(cA,cH,cV,cD,Lo_R,Hi_R)使用指定的重构低通和高通滤波器 Lo_R、Hi_R 重构原信号 X。

X=idwt2(cA,cH,cV,cD,'wname',S)和 X=idwt2(cA,cH,cV,cD,Lo_R,Hi_R,S)返回中心附近的 S 个数据点。

用二维小波反变换重构信号的算法如图 6.18 所示。

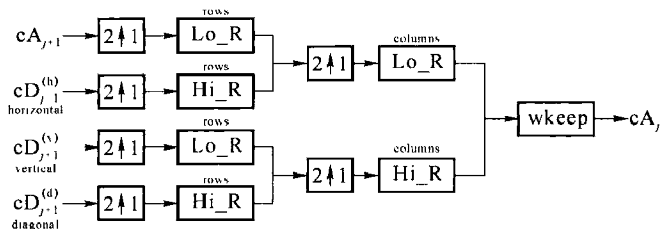


图 6.18 由二维离散小波反变换重构信号

举例:由二维小波分解重构原始图像,结果如图 6.19 所示。

```
load woman;
sX = size(X);
[cA1,cH1,cV1,cD1] = dwt2(X,'db4');
A0 = idwt2(cA1,cH1,cV1,cD1,'db4',sX);
subplot(1,2,1),imshow(X,[])
title('原始图像');
subplot(1,2,2),imshow(A0,[])
title('由二维小波分解重构后的图像');
```

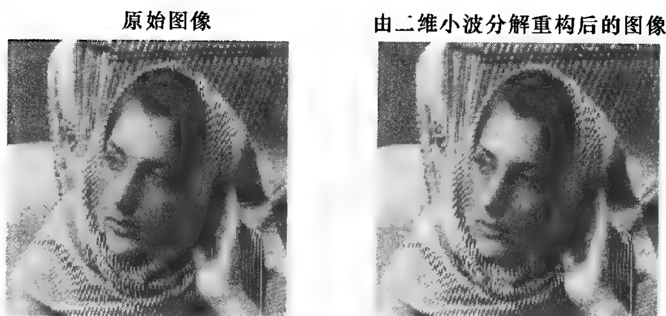


图 6.19　由二维小波分解重构原始图像

3. wavedec2

功能:二维信号的多层小波分解。

格式:[C,S] = wavedec2(X,N,'wname')

　　[C,S] = wavedec2(X,N,Lo_D,Hi_D)

说明:[C,S]=wavedec2(X,N,'wname')使用小波基函数'wname'对二维信号进行 N 层分解。

[C,S]=wavedec2(X,N,Lo_D,Hi_D)使用指定的分解低通和高通滤波器 Lo_D 和 Hi_D 分解信号 X。

图 6.20 和图 6.21 是分解算法的示意图。返回数据结构 C 的构成如图 6.22 所示。

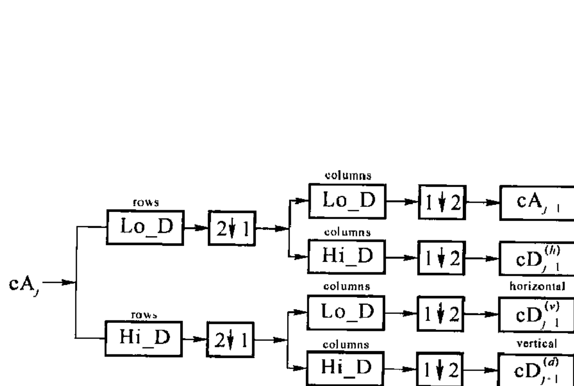


图 6.20　二维小波分解

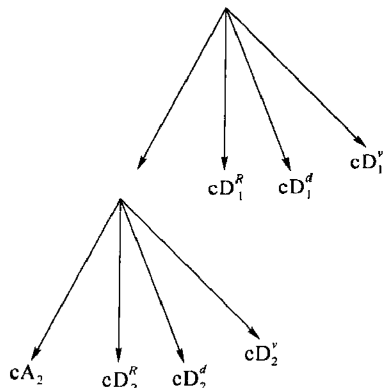


图 6.21　多层小波分解

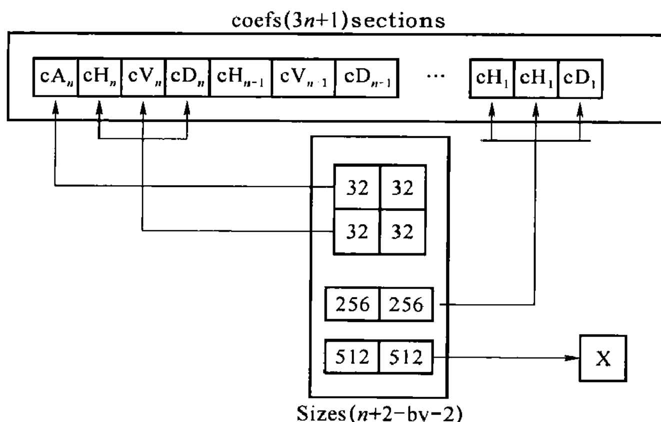


图 6.22　数据结构 C 的构成

$S(1,:)$为近似分量的长度，$S(i,:)$为细节分量的长度，$i=2,\cdots,N+1$。

$S(N+2,:)=\text{size}(X)$。

4. waverec2

功能：二维信号的多层小波重构。

格式：X = waverec2(C,S,'wname')

　　　X = waverec2(C,S,Lo_R,Hi_R)

说明：X= waverec2(C,S,'wname')由多层小波分解的结果 C、S 重构原始信号 X，'wname'为使用的小波基函数。

　　X=waverec2(C,S,Lo_R,Hi_R)使用重构低通和高通滤波器 Lo_R、Hi_R 重构原信号。

举例：由图像的两层分解重构图像，结果如图 6.23 所示。

```
load woman;
[c,s] = wavedec2(X,2,'sym4');
a0 = waverec2(c,s,'sym4');
subplot(1,2,1),imshow(X,[])
title('原始图像');
subplot(1,2,2),imshow(a0,[])
title('重构后的图像');
```

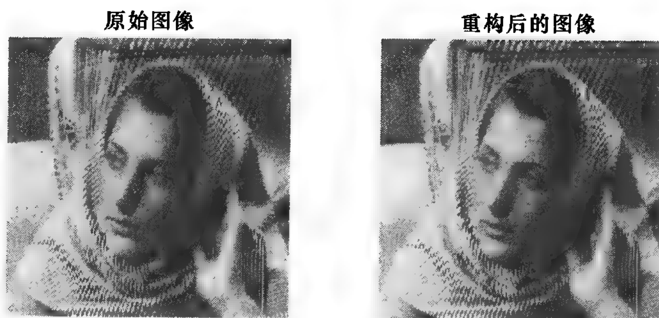


图 6.23　由图像的两层分解重构图像

5. appcoef2

功能:提取二维信号小波分解的近似分量。

格式:A = appcoef2(C,S,'wname',N)

A = appcoef2(C,S,'wname')

A = appcoef2(C,S,Lo_R,Hi_R)

A = appcoef2(C,S,,Lo_R,Hi_R,N)

说明:A=appcoef2(C,S,'wname',N)由 wavedec2 函数生成的二维小波分解结构 C,S 提取第 *N* 层的近似分量。

'wname'为小波基函数的名称。*N* 的默认值为 size(S,1)-2。

A=appcoef2(C,S,Lo_R,Hi_R)和 A=appcoef2(C,S,,Lo_R,Hi_R,N)使用指定的重构滤波器 Lo_R、Hi_R 提取近似分量。

举例:由图像的 3 层小波分解提取第 1 层和第 2 层的近似分量,结果如图 6.24 所示。

```
load woman;
[c,s] = wavedec2(X,3,'db1');
ca1 = appcoef2(c,s,'db1',1);
ca2 = appcoef2(c,s,'db1',2);
imshow(X,[]);
title('原始图像');
figure,imshow(ca1,[])
title('第 1 层的近似分量');
figure,imshow(ca2,[])
title('第 2 层的近似分量');
```



图 6.24　原始图像和第 1 层、第 2 层的近似分量

6. detcoef2

功能:提取二维信号小波分解的细节分量。

格式:D = detcoef2(O,C,S,N)

说明:D=detcoef2(O,C,S,N)由 wavedec2 函数产生的多层小波分解结构 C、S 提取第 *N* 层的细节分量。

参数'O'指定要重构的细节分量，即：

'O'='h'，重构水平细节信号

'O'='v'，重构垂直细节信号

'O'='d'，重构对角细节信号

举例：由二维信号的 3 层小波分解提取第 1 层分解的细节分量，结果如图 6.25 所示。

```
load woman;
[c,s] = wavedec2(X,3,'db1');
chd2 = detcoef2('h',c,s,1);
cvd2 = detcoef2('v',c,s,1);
cdd2 = detcoef2('d',c,s,1);
imshow(X,[])
title('原始图像');
figure
subplot(1,3,1),imshow(chd2,[])
title('第 1 层分解的水平细节');
subplot(1,3,2),imshow(cvd2,[])
title('第 1 层分解的垂直细节');
subplot(1,3,3),imshow(cdd2,[])
title('第 1 层分解的对角细节');
```



图 6.25 原始图像和第 1 层分解的细节分量

7. wrcoef2

功能：由多层小波分解重构某一层的分解信号。

格式：X = wrcoef2('type',C,S,'wname',N)

X = wrcoef2('type',C,S,Lo_R,Hi_R,N)

```
X = wrcoef2('type',C,S,'wname')
X = wrcoef2('type',C,S,Lo_R,Hi_R)
```

说明：X=wrcoef2('type',C,S,'wname',N)由多层小波分解的结果 C、S 重构第 N 层的分解信号 X，N 的默认值为 N=size(S,1)−2。

经过插值，返回的每一个信号都与原信号的尺寸相同。

'wname'为所用的小波基函数。

'type'指定要重构的分量，即：

'type' = 'a'，重构近似分量

'type' = 'h'，重构水平细节分量

'type' = 'v'，重构垂直细节分量

'type' = 'd'，重构对角细节分量

X=wrcoef2('type',C,S,Lo_R,Hi_R,N)使用重构低通和高通滤波器 Lo_R、Hi_R 重构分解系数 X。

举例：将 MATLAB 小波工具箱中存储的图像用 wavedec2 函数作两级分解。程序如下：

```
clear all
%装入并显示索引图像
load wbarb;image(X);colormap(map);colorbar;
%将索引图像转化成灰度图像并显示
I = ind2gray(X,map);figure;I = imadjust(I,stretchlim(I),[0,1]);imshow(I);
%做二维小波分解并显示其结果
wname = 'sym2';
[C,S] = wavedec2(I,2,wname);
cA1 = appcoef2(C,S,wname,1);
[cH1,cV1,cD1] = detcoef2('all',C,S,1);
cA2 = appcoef2(C,S,wname,2);
[cH2,cV2,cD2] = detcoef2('all',C,S,2);
A1 = wrcoef2('a',C,S,wname,1);
H1 = wrcoef2('h',C,S,wname,1);
V1 = wrcoef2('v',C,S,wname,1);
D1 = wrcoef2('d',C,S,wname,1);
A2 = wrcoef2('a',C,S,wname,2);
H2 = wrcoef2('h',C,S,wname,2);
V2 = wrcoef2('v',C,S,wname,2);
D2 = wrcoef2('d',C,S,wname,2);
figure;
subplot(2,2,1);A1 = abs(A1);A1 = imadjust(A1,stretchlim(A1),[0,1]);imshow(A1);
title('Approximation A1')
subplot(2,2,2);H1 = abs(H1);H1 = imadjust(H1,stretchlim(H1),[0,1]);imshow(H1);
title('Horizontal Detail H1')
subplot(2,2,3);V1 = abs(V1);V1 = imadjust(V1,stretchlim(V1),[0,1]);imshow(V1);
```

```
title('Vertical Detail V1')
subplot(2,2,4);D1 = abs(D1);D1 = imadjust(D1,stretchlim(D1),[0,1]);imshow(D1);
title('Diagonal Detail D1')
figure;
subplot(2,2,1);A2 = abs(A2);A2 = imadjust(A2,stretchlim(A2),[0,1]);imshow(A2);
title('Approximation A2')
subplot(2,2,2);H2 = abs(H2);H2 = imadjust(H2,stretchlim(H2),[0,1]);imshow(H2);
title('Horizontal Detail H2')
subplot(2,2,3);V2 = abs(V2);V2 = imadjust(V2,stretchlim(V2),[0,1]);imshow(V2);
title('Vertical Detail V2')
subplot(2,2,4);D2 = abs(D2);D2 = imadjust(D2,stretchlim(D2),[0,1]);imshow(D2);
title('Diagonal Detail D2')
```

原始图像是一个索引图像，其文件名为 wbarb，图像数组与颜色图数组名分别为 X 和 map，程序运行之后，可以看到颜色图是平滑的。将它转换成灰度图像 I 之后作为小波分解的原始图像 A0，做了两级分解之后第 1 级的逼近及横向、纵向、斜向细节为 A1 和 H1、V1、D1，第 2 级的逼近及横向、纵向、斜向细节为 A2 和 H2、V2、D2，如图 6.26 所示。



图 6.26　图像的多层小波分解及重构

8. upcoef2

功能：由多层小波分解重构近似分量或细节分量。

格式：Y = upcoef2(O,X,'wname',N,S)

```
Y = upcoef2(O,X,Lo_R,Hi_R,N,S)
Y = upcoef2(O,X,'wname',N)
```

```
Y = upcoef2(O,X,Lo_R,Hi_R,N)
Y = upcoef2(O,X,'wname')
Y = upcoef2(O,X,Lo_R,Hi_R)
```

说明：Y=upcoef2(O,X,'wname',N,S) 'O'是指要重构的信号，即

'O'='a'，重构近似信号

'O'='h'，重构水平细节信号

'O'='v'，重构垂直细节信号

'O'='d'，重构对角细节信号

举例：由两层小波分解重构第 1 层的分解信号，结果如图 6.27 所示。

```
load woman;
[c,s] = wavedec2(X,2,'db4');
siz = s(size(s,1),:);
ca1 = appcoef2(c,s,'db4',1);
a1 = upcoef2('a',ca1,'db4',1,siz);
chd1 = detcoef2('h',c,s,1);
hd1 = upcoef2('h',chd1,'db4',1,siz)
cvd1 = detcoef2('v',c,s,1);
vd1 = upcoef2('v',chd1,'db4',1,siz);
cdd1 = detcoef2('d',c,s,1);
dd1 = upcoef2('d',cdd1,'db4',1,siz);
subplot(2,2,1),imshow(a1,[])
title('重构近似信号');
subplot(2,2,2),imshow(hd1,[])
title('重构水平细节信号');
subplot(2,2,3),imshow(vd1,[])
title('重构垂直细节信号');
subplot(2,2,4),imshow(dd1,[])
title('重构对角细节信号');
```

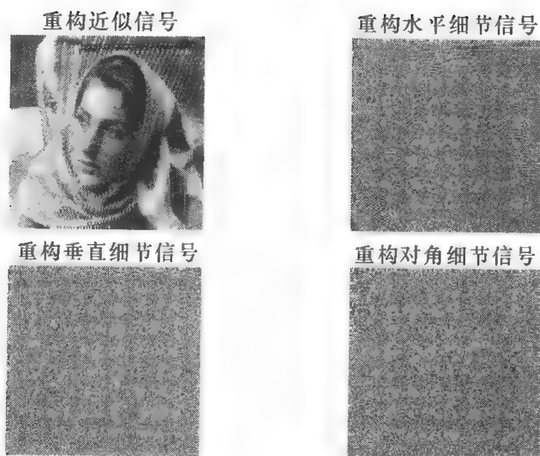


图 6.27　由两层小波分解重构第 1 层的分解信号

6.5　小波包变换的 MATLAB 实现

MATLAB 小波分析工具箱提供的小波包变换函数如表 6.6 所示。利用这些函数，用户可以实现一维小波包分解、二维小波包分解、提取小波包分解结点系数、小波包重构、小波包树结构结点的组合和分割等功能。

表 6.6　小波包变换函数

函数名	说明	函数名	说明
bestlevt	计算最佳小波包树	wpdec2	二维小波包分解
besttree	计算最佳树	wpfun	小波包函数
entrupd	小波包熵更新	wpjoin	小波包重组
wnerngy	小波或小波包分解的能量	wprcoef	小波包系数的重构
wp2wtree	从小波包树中提取小波树	wprec	一维小波包重构
wpcoef	提取小波包系数	wprec2	二维小波包重构
wpcutree	剪切小波包树	wpsplt	分解小波包
wpdec	一维小波包分解	wentropy	计算小波包的熵

1. wpcoef

功能：提取小波包系数。

格式：X = wpcoef(T,N)

　　X = wpcoef(T)

说明：wpcoef 是一维或二维小波包分析函数。

X=wpcoef(T,N)返回小波包树 T 中结点 N 相关的系数。如果 N 不存在，那么 X=[]。

X=wpcoef(T)等同于 X=wpcoef(T,0)。

举例：

```
% 当前延拓模式是补零
% 装载信号
load noisdopp; x = noisdopp;
figure(1);subplot(2,1,1);
plot(x);title('原始信号');
% 使用 db1 小波包对 x 进行 3 层分解,使用 Shannon 熵
wpt = wpdec(x,3,'db1');
% 画出小波包树
plot(wpt)
% 读取小波包(2,1)的系数
cfs = wpcoef(wpt,[2,1]);
```

```
figure(1);subplot(2,1,2);
plot(cfs);title('小波包(2,1)的系数');
```

结果如图 6.28 和图 6.29 所示。

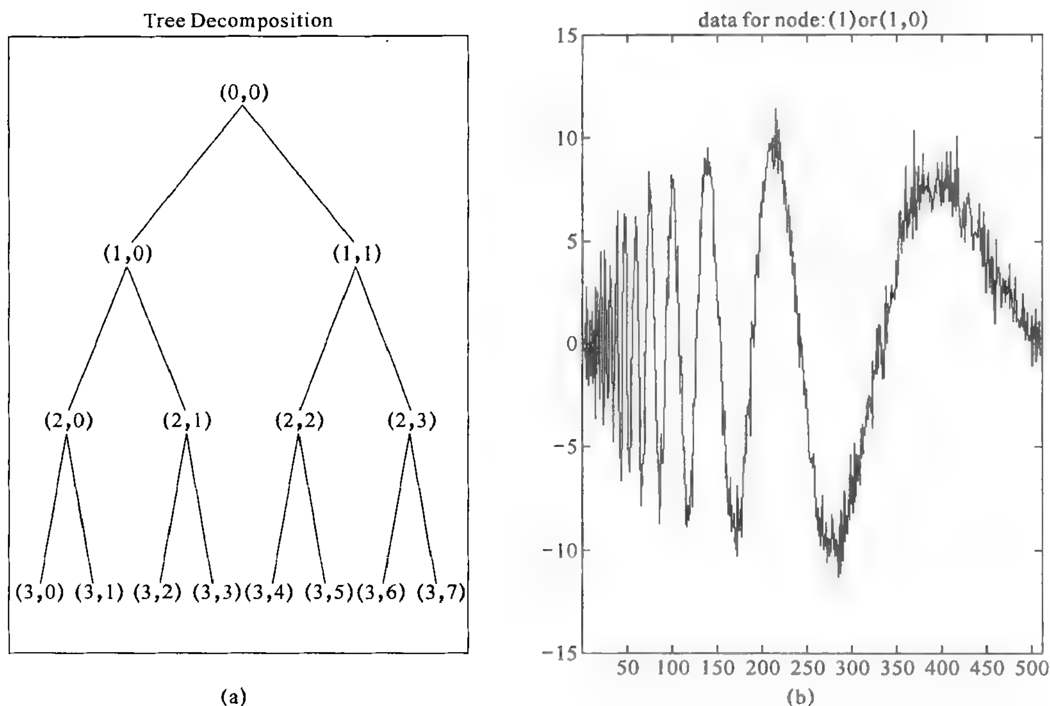


图 6.28 小波包树(左侧树结构,右侧(1,0)结点数据)

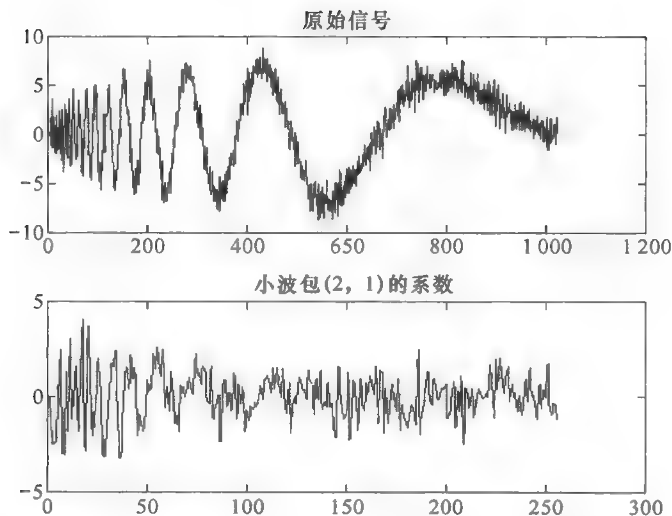


图 6.29 计算小波包的系数

2. wpdec

功能:一维小波包分解。

格式:T = wpdec(X,N,'wname',E,P)

T = wpdec(X,N,'wname')

说明:wpdec是一维小波包分解函数。

T=wpdec(X,N,'wname',E,P)使用小波'wname',并根据向量 X 在第 N 层的小波包分解结构,返回小波包T。E是包含熵类型的字符串,P是由T值决定的优化参数。如表6.7所示。

T=wpdec(X,N,'wname')等价于T=wpdec(X,N,'wname','Shannon')。

表6.7 熵类型E和P的对应表

熵类型名(E)	参数(P)	说明
'Shannon'		P不用
'log energy'		P不用
'threshold'	0≤P	P是阈值
'sure'	0≤P	P是阈值
'norm'	1≤P	P是指数
'user'	string	P是包含M文件名的字符串,M文件定义了使用单输入X的自定义熵函数
FunName	P无限制	FunName是除了前面的熵类型名以外的任何其他字符串,包含用户熵函数的M文件名,该熵函数以X作为输入,P作为熵函数的附加参数

对于给定的正交小波函数,可以生成一组小波包基,每个基都提供了一种特定的信号编码方法,它能保留信号的全部能量,并对信号的特征进行准确的重构。这些小波包可以对于给定的信号进行多种分析和解释。

对于小波包的分解和最佳分解方式的选择,都有简单而有效的算法。其中自适应算法可以直接用于最优信号编码和数据压缩。

在正交小波分解过程中,一般的方法是将低频系数分为两部分,得到新的低频系数向量和高频系数向量,两个连续的低频系数之间损失的信息可以由高频系数获得,然后是将新的低频系数向量继续分解,而高频系数保持不动。而对于小波包分解来说,每个高频系数向量也使用和低频系数分解同样的方法,分成两个部分,这样就提供了更为丰富的信号分析方法:在一维分析中产生了完整二叉树,而在二维分析中则产生了四叉树。

举例:

```
%当前延拓模式是补零
%装载信号
load noisdopp; x = noisdopp;
% 使用 db1 小波包对 x 进行 3 层分解;使用 Shanoon 熵
wpt = wpdec(x,3,'db1','Shannon');
%结果得到了小波包树 wpt
%结果画出小波包树
plot(wpt)
```

结果如图 6.30 所示。

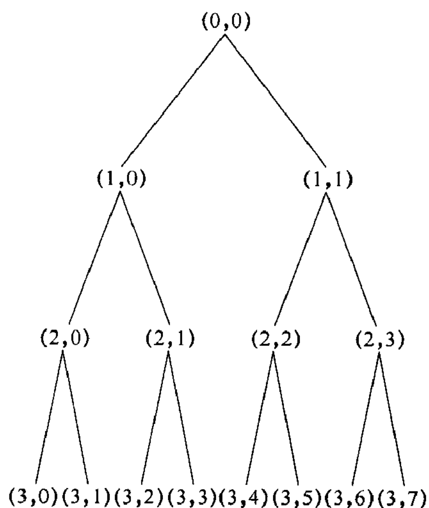


图 6.30 小波包树

3. wpdec2

功能：二维小波包分解。

格式：T = wpdec2(X,N,'wname',E,P)

　　T = wpdec2(X,N,'wname')

说明：wpdec2 是二维小波包分解函数。

T=wpdec2(X,N,'wname',E,P)使用特定的小波'wname'，由矩阵 X 在第 *N* 层的小波包分解，返回小波包树。

T=wpdec2(X,N,'wname')等同于 T=wpdec2(X,N,'wname','Shannon')。

E 是包含熵类型的字符串，P 是由 E 值确定的优化参数。

举例：

```
% 当前延拓模式是补零
% 装载图像
load tire
% X 包含装载的图像
% 使用下面的函数进行图像分解
t = wpdec2(X,2,'db1');
% 默认的熵准则是 Shannon 熵
% 画出小波包四叉树
plot(t)
```

结果如图 6.31 所示。

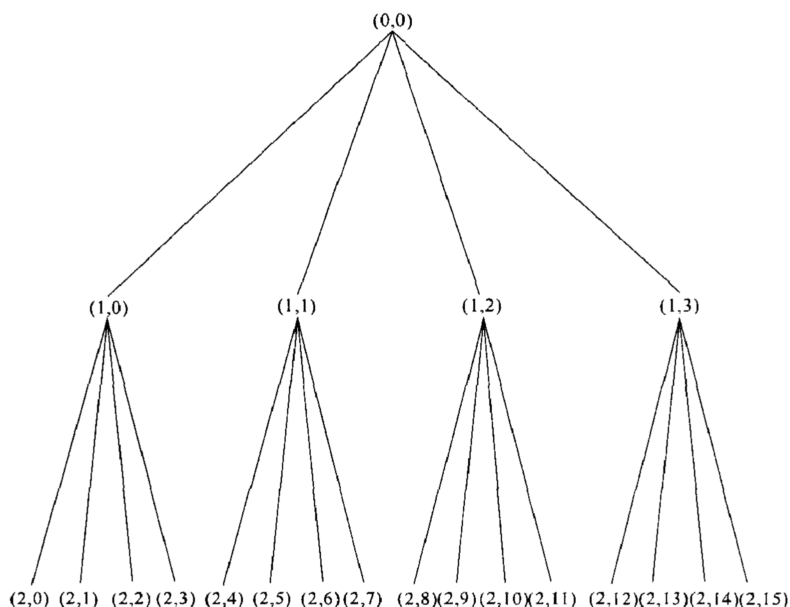


图 6.31　小波包四叉树

4. wprcoef

功能：重构小波包系数。

格式：X = wprcoef(T,N)

说明：wprcoef 是一维或二维小波包分析函数。该函数计算小波包树 T 中节点 N 的重构系数。

X=wprcoef(T)等同于 X=wprcoef(T,0)。

举例：

```
% 当前延拓模式是补零
% 载入信号
load noisdopp; x = noisdopp;
figure(1);subplot(2,1,1);
plot(x);title('原始信号');
% 利用 db1 小波包在第 3 层对 x 进行分解,使用 Shannon 熵
t = wpdec(x,3,'db1','Shannon');
% 画出小波包树
plot(t);
% 重构小波包节点(2,1)
rcfs = wprcoef(t,[2 1]);
figure(1);subplot(2,1,2);
plot(rcfs);title('重构小波包节点(2,1)');
```

结果如图 6.32 和图 6.33 所示。

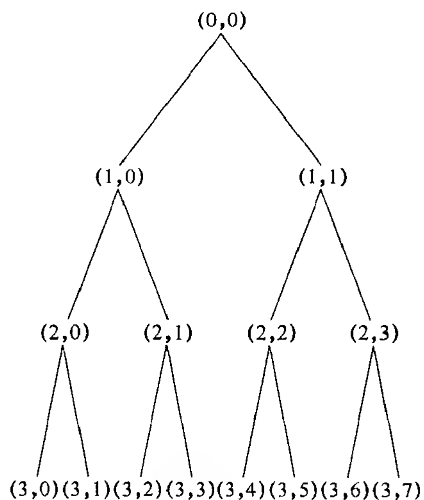


图 6.32 小波包树

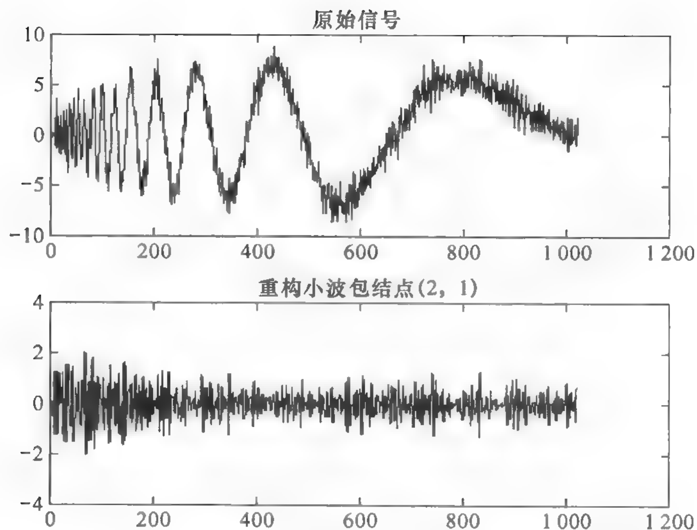


图 6.33 小波包结点重构系数

5. wprec

功能：一维小波包重构。

格式：X = wprec(T)

说明：wprec 是一维小波包分析函数，它根据小波包树 T，返回重构的向量 X。wprec 是 wpdec 的逆函数，即 X=wprec(wpdec(X,'wname'))。

参考函数：wpdec、wpdec2、wpjoin、wprec2 和 wpsplt。

6. wprec2

功能：二维小波包重构。

格式：X = wprec2(T)

说明：wprec 是二维小波包分析函数，它根据小波包树 T，返回重构的向量 X。wprec2 是 wpdec2 的逆函数，即 X=wprec2(wpdec2(X,'wname'))。

参考函数：wpdec、wpdec2、wpjoin、wprec2 和 wpsplt。

7. besttree

功能：最优小波包树。

格式：
```
T = besttree(T)
[T,E] = besttree(T)
[T,E,N] = besttree(T)
```

说明：besttree 函数是一维或二维小波包分析函数，它根据某种熵标准计算原始树的最佳子树，得到的结果可能比原始树小得多。

长度为 $N=2^L$ 的信号可以用 2^L 种不同的分解方式分解，这正好是一个深度为 L 的完整二叉树的子叉树的数目，是非常庞大的，如果用枚举法一一列举将难以想象。因此，我们感兴趣的是要根据某种简单的准则和有效的算法，找出其最优分解的方式。

T＝besttree(T)根据最优熵值，计算相应的最优树。

[T,E]＝besttree(T)计算最优树 T 和最优熵值 E。索引序号为 $j-1$ 的结点的最优熵值为 E(j)。

[T,E,N]＝besttree(T)计算最优树 T、最优熵 E 和包含被合并结点的索引序号向量 N。算法说明：考虑一维的情况，从根结点开始，用以下方法来计算最优树：当且仅当 N_1 和 N_2 熵的和小于 N 的熵值时，一个结点 N 才可以被分为两个结点 N_1 和 N_2。这是结点 N 仅仅基于可用信息的局部准则。

可以使用集中熵准则(参见 wernergy 函数)，如果熵函数沿着小波包系数方向是递增的，那么以这种算法就可以得到最优树。

从初始树 T 开始，使用这种合并边界的算法，我们可以从 T 中所有的二叉树中得到最优树。

举例：
```
% 当前的延拓模式是补零
% 装载信号
load noisdopp; x = noisdopp;
% 使用默认熵(Shannon 熵)，用 db1 小波对 x 进行 3 层分解
wpt = wpdec(x,3,'db1');
% 分解小波包[3 0]
wpt = wpsplt(wpt,[3 0]);
% 画出小波包树
plot(wpt);
figure
% 计算最优小波包树
bt = besttree(wpt);
% 画出最优小波包树
plot(bt);
```

结果如图 6.34 和图 6.35 所示。

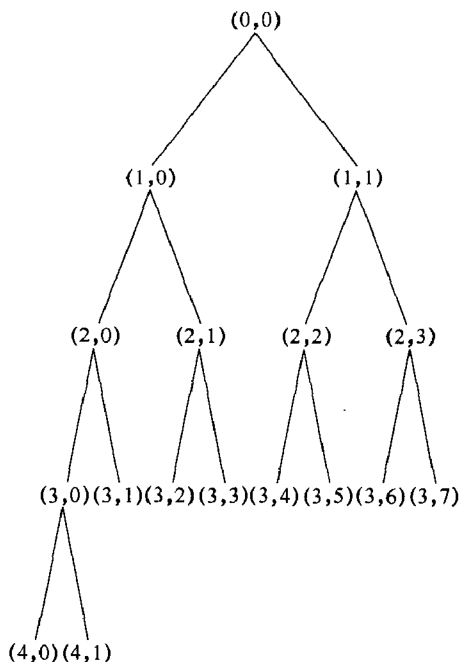


图 6.34　小波包树

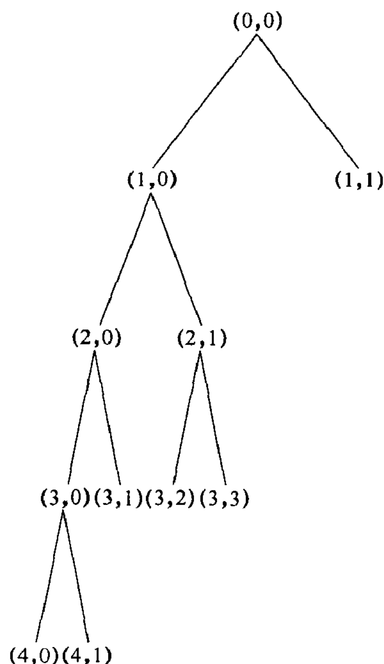


图 6.35　最优小波包树

参考函数：bestlevt、wenergy、wpdec、和 wpdec2。

8. wp2wtree

功能：从小波包树中提取小波树。

格式：T = wp2wtree(T)

说明：wp2wtree 是一维或二维小波包分析函数。该函数根据小波包分解树，计算修改后的小波包树 T。

举例：

```
% 当前延拓模式是补零
% 装载信号
load noisdopp; x = noisdopp;
% 使用 db1 小波包对 x 进行 3 层分解，使用 Shannon 熵
wpt = wpdec(x,3,'db1');
% 画出小波包树
plot(wpt)
% 计算小波树
wt = wp2wtree(wpt);
% 画出小波树
plot(wt);
```

结果如图 6.36 和图 6.37 所示。

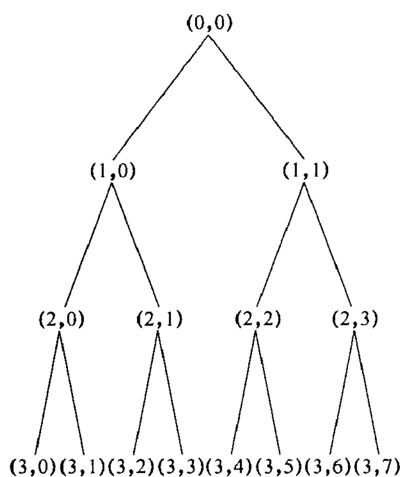


图 6.36　小波包树

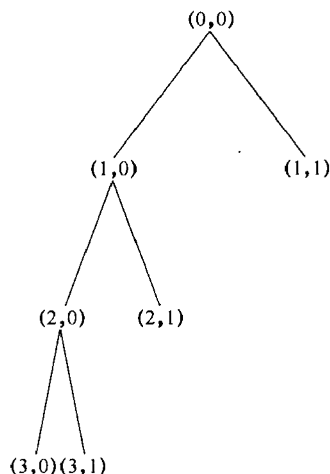


图 6.37　最优小波包树

6.6　MATLAB 小波图形用户接口

除了命令行方式外，小波分析工具箱还提供了图形用户接口(Graphical User Interface，GUI)方式，可以利用它实现小波分析的绝大部分功能。在 GUI 模式下，不需要进行任何编程，只要通过菜单操作和各种参数的选择就可对信号进行小波分析。

6.6.1　小波 GUI 的启动和功能

在 MATLAB 命令符下键入 wavemenu 后按 Enter 键，即会出现小波工具箱主菜单窗口(Wavelet Toolbox Main Menu)，如图 6.38 所示。

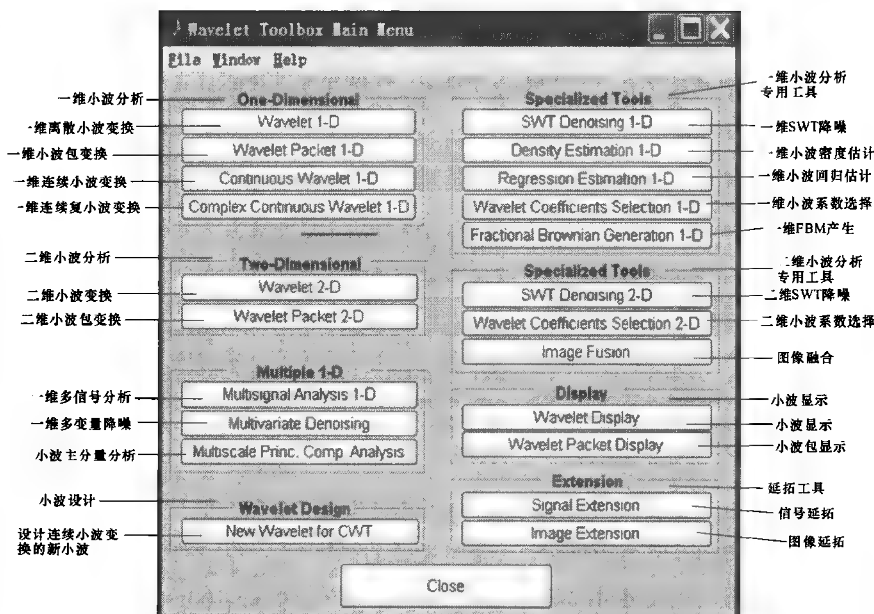


图 6.38　小波 GUI 的界面

可以看出,小波 GUI 的功能非常丰富,如表 6.8 所示。

表 6.8　小波 GUI 的主要功能

主要功能	子功能	主要功能	子功能
一维小波分析	一维离散小波变换	一维小波分析专用工具	一维平稳小波降噪
	一维小波包变换		一维小波变换密度估计
	一维连续小波变换		一维小波变换回归估计
	一维连续复小波变换		一维小波系数选取
二维小波分析	二维小波变换		一维 FBM 产生
	二维小波包变换	二维小波分析专用工具	二维平稳小波降噪
小波显示	小波显示		二维小波系数选择
	小波包显示		图像融合
一维多信号分析	一维多信号分析	小波构造	CWT 小波构造
	一维多变量降噪	延拓工具	信号延拓
	小波主分量分析		图像延拓

有一点需要特别强调,小波 GUI 中,在执行一维小波回归估计、一维小波密度估计、一维小波系数选取及二维小波系数选取时,要在 MATLAB 的命令行工具中将延拓模式改为"对称填充"方式:

```
>> dwtmode('sym');
```

而这些工具使用结束后,要用下面的命令将延拓模式切换到默认的"补零"模式:

```
>> dwtmode('mode');
```

6.6.2　小波 GUI 的基本说明

主要对小波工具箱 GUI 中,比较特殊的几个方面进行说明。

1. 颜色设置

在所有的图形工具中,信号和分析结果显示的颜色按表 6.9 所示的方式进行设置。

表 6.9　信号和分析结果显示的颜色设置

信号	显示颜色	信号	显示颜色
原始信号	红色	低频分量(近似分量)	蓝色梯度(尺度越高,颜色越深)
重构或者合成信号	黄色	高频分量(细节分量)	绿色梯度(尺度越高,颜色越深)

2. 图形的关联性

所谓图形的关联性,就是指对于包含关联信息,并使用同一横坐标的图形集,如果对其中的某一个图形进行操作,那么其他图形也将随之改变。对于二维图像来说,关联性在横坐标和纵坐标上都有体现,可以使用某独立的坐标(X 或 Y)或者同时改变 XY 两个坐标来改变所有的图形。例如,低频和高频系数显示使用的是分离模式,当其中的任何一个图形放大时,其他的图形都会相应放大。

3. 染色的控制

Colormap 选择框位于窗口的右下部，调整它可以控制画图形或者系数时的颜色显示，其目的是为了突出图形的不同特性。

4. 颜色数量的控制

Nb. Colors 游标位于窗口右下部。它允许调整画图形或者系数(小波或者小波包)时使用的颜色数目，也可以使用编辑框来改变颜色数目。调整颜色的数目可以高亮显示图形中不同的特性。

5. 染色模式的控制

在连续小波工具中，系数的染色可以采用几种不同的模式。主要通过 3 个参数来控制。

(1) init 或 current：如果选择 init，对所有的系数都进行染色。如果选择 current，只有一部分系数染色，这些系数在显示的系数中，变得比较明显。

(2) by scale 或 all scales：如果选择 by scale，那么对各个尺度分开进行染色；否则，对所有的尺度得到的小波系数都进行染色。

(3) abs(or not)：如果不选择 abs，那么使用系数值(称为 Normal Mode)；否则，是那个的系数的绝对值(称为 Absolute Mode)。

6.6.3 小波 GUI 中的小波和小波包显示

在介绍了小波工具箱 GUI 的共同特性之后，我们首先来了解小波 GUI 中的小波和小波包显示。它们位于 Wavelet Toolbox Main Menu 窗口中的 Display 组件框中，单击它们可以显示 MATLAB 中的小波和小波包函数族的信息。

1. 小波信息显示

Sym 小波信息显示如图 6.39 所示。

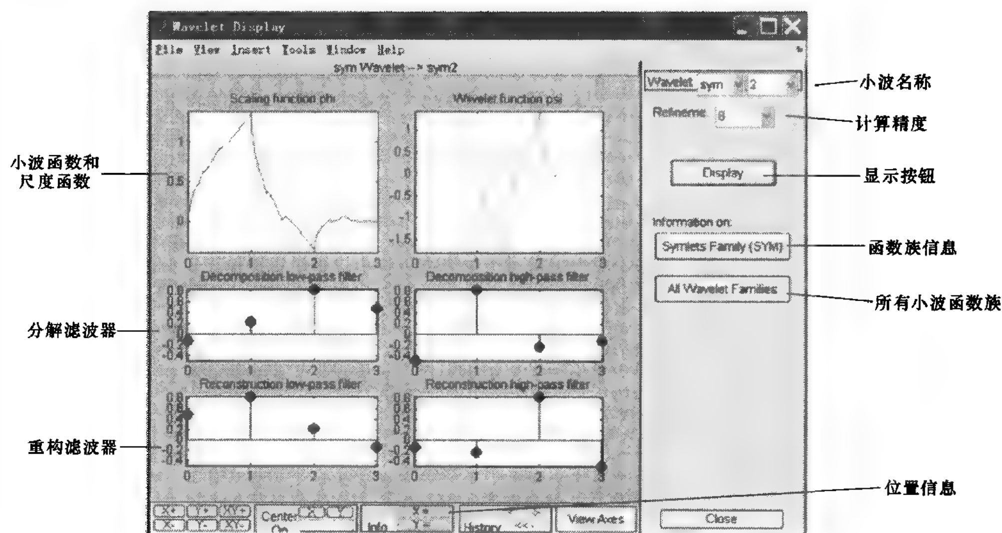


图 6.39　sym 小波信息显示

2. 小波包信息显示

小波包信息显示的主窗口如图 6.40 所示。

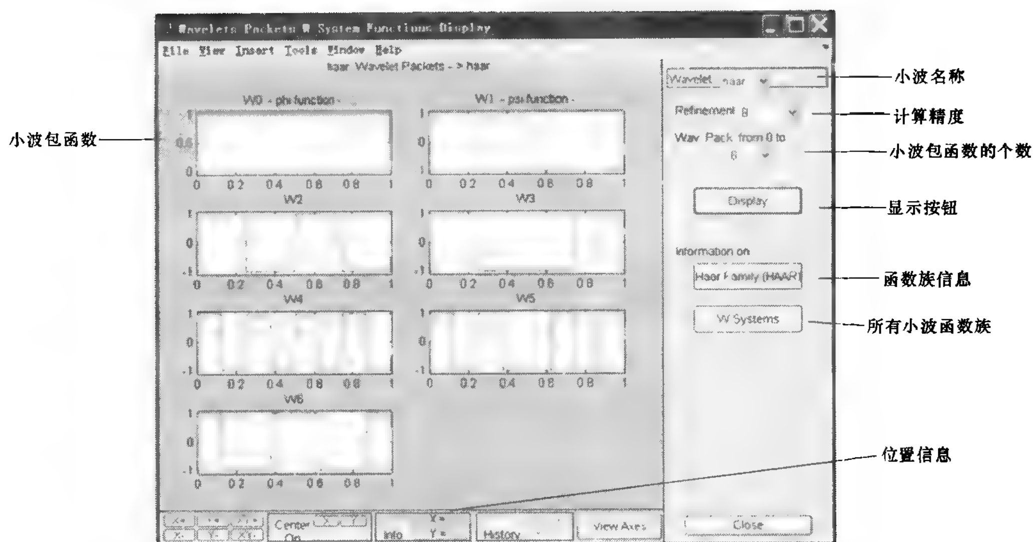


图 6.40　haar 小波包信息显示

6.6.4　一维离散小波变换

在小波工具箱菜单中单击 Wavelet 1-D 按钮，出现如图 6.41 所示的一维离散小波分析工具。

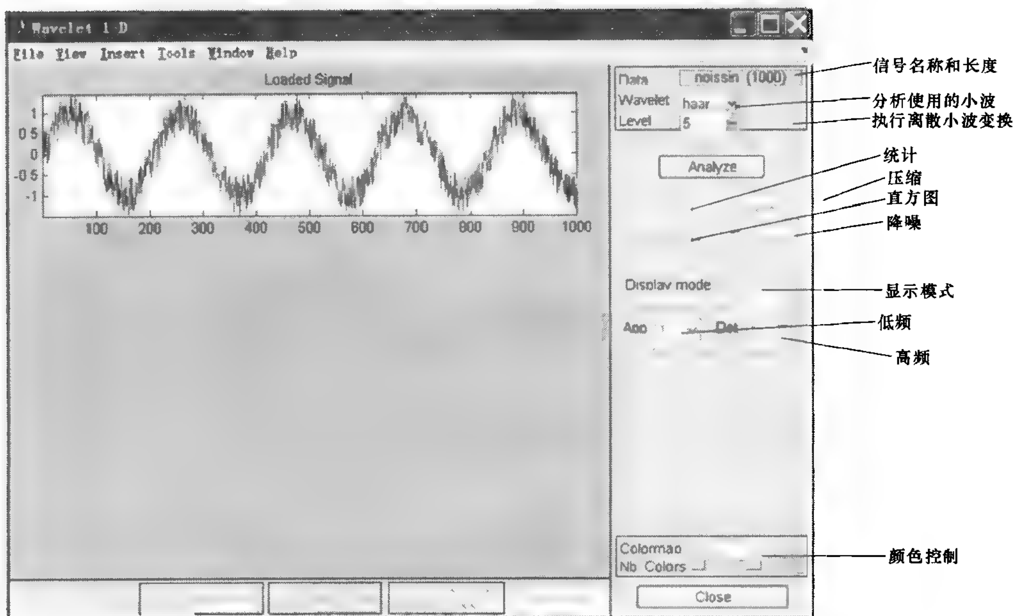


图 6.41　一维离散小波分析图形工具

在图 6.42 中的右上角选择基本小波为 dmey，尺度 Level 为 1，其他参数默认，单击【Analyze】按钮，经过短时间的计算后将出现如图 6.42 所示的分解结果。

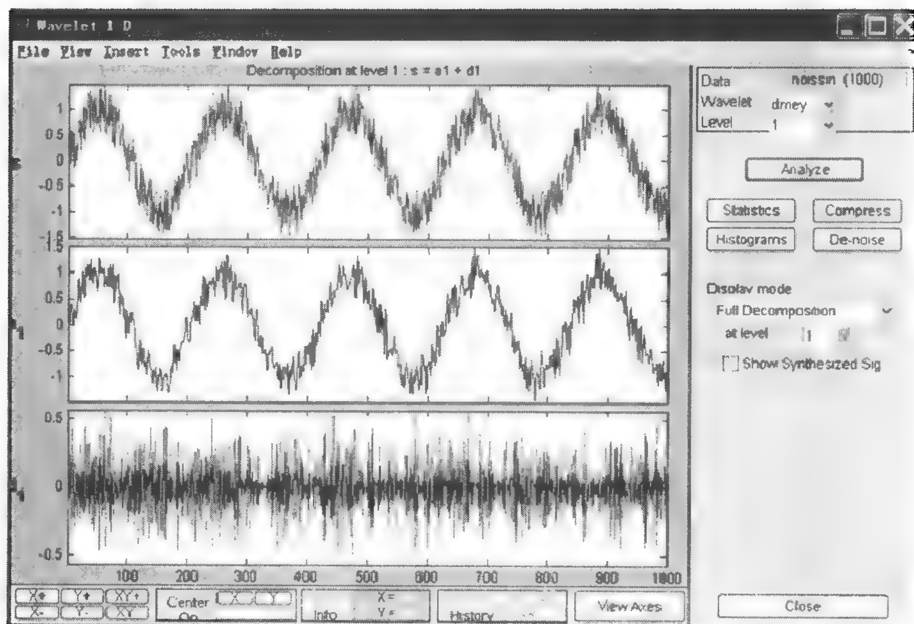


图 6.42　单尺度一维离散小波变换

6.6.5　二维离散小波变换

在小波工具箱主菜单中单击 Wavelet 2 D 按钮，出现如图 6.43 所示的二维离散小波分析图形工具，分析结果如图 6.44 所示。

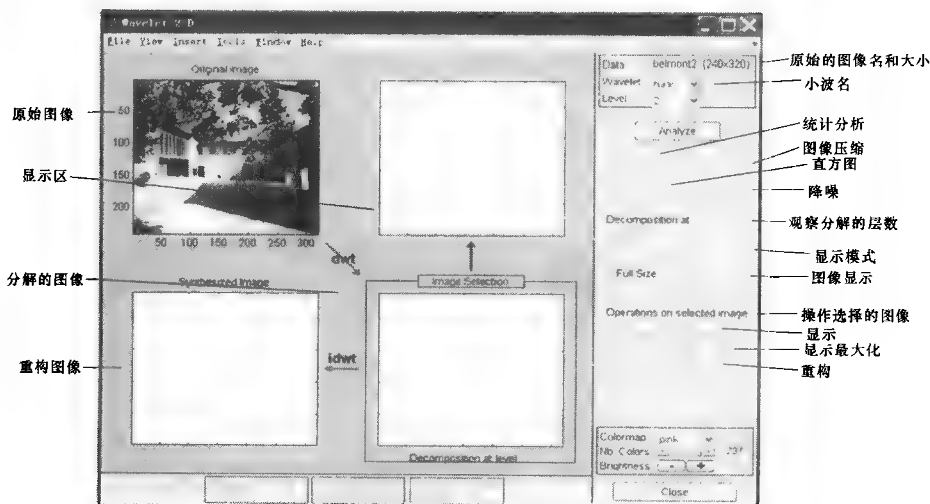


图 6.43　二维小波分解工具



图 6.44　二维小波分解结果

第7章 小波分析应用技术

小波分析的应用是与小波分析的理论研究紧密地结合在一起的。小波分析的应用领域十分广泛，包括：数学领域的许多学科；信号分析、图像处理；量子力学、理论物理；军事电子对抗与武器的智能化；计算机分类与识别；音乐与语言的人工合成；医学成像与诊断；地震勘探数据处理；机械的故障诊断等。

本章将主要讲述小波在信号去噪、信号压缩、信号的奇异性检测以及在数字水印等领域的应用情况，以实例说明小波用于解决实际问题的基本方法。

7.1 小波在信号去噪中的应用

工程实际中检测到的信号往往混有不同程度的噪声。从振动的角度来说，噪声是指无规律的振动；从信号处理角度来说，噪声分为白噪声和有色噪声，白噪声是指频率分量的能量均匀分布在整个给定带宽内，有色噪声是指频率分量的能量集中在给定带宽的某个频带内。广义上讲，可以统称信号中有用成分以外的所有成分为噪声。一个含有噪声的信号模型如下：

$$s(t)=f(t)+n(t) \tag{7.1.1}$$

其中 $s(t)$ 是原始信号，即我们想要得到的信号，$n(t)$ 为噪声，信号去噪是信号处理领域的经典问题之一。降噪的目的是抑制信号 $s(t)$ 中的噪声部分，再现信号 $f(t)$。传统的去噪方法主要包括线性滤波方法和非线性滤波方法，如 wiener 滤波和中值滤波等。传统去噪方法的不足在于使信号变换后的熵增高，无法刻画信号的非平稳特性、无法得到信号的相关性。而小波变换具有良好的时-频特性，从而为其在信号降噪中的应用提供了广阔的前景。

7.1.1 小波信号去噪的准则及常用的方法

信号去噪的准则如下：

(1) 光滑性。在大部分情况下，降噪后的信号应该至少和原信号具有同等的光滑性。

(2) 相似性。降噪后的信号和原信号的方差估计应该是最坏情况下的最小值。

当前，小波技术在信号去噪中得到了广泛的研究并取得了非常好的应用效果，已成为信号去噪的主要方法之一。主要原因是小波变换具有下述特点：

(1) 低熵性。小波系数的稀疏分布使信号变换后的熵降低。

(2) 多分辨率性质。该性质使小波变换可以非常好地刻画信号的非平稳特性，如边缘、

尖峰、断点等。

(3) 去相关性。可以对信号进行去相关,且噪声在变换后有白化趋势,所以在小波域比在时域更利于去噪。

(4) 小波基选择的多样性。由于小波变换可以灵活地选择不同的小波基,如单小波、多小波、多带小波、小波包、平移不变小波等,因此可以根据信号特点和去噪要求选择合适小波。

小波去噪方法,可以分为3类:

(1) 基于小波变换极大值原理。Mallat 提出,信号与噪声在小波变换各尺度上有不同的传播特性,通过观察不同尺度上的小波变换模极大值的渐变规律和分布规律,剔除由噪声产生的模极大值点,用所剩余的模极大值点恢复信号。

(2) 基于相关性去噪。信号的小波变换在各尺度间有较强的相关性,而且在边缘处也具有很强的相关性;而噪声的小波变换在各尺度间却没有明显的相关性,而且,噪声的小波变换主要集中在小尺度各层次中。基于相关性小波去噪方法,首先计算相邻尺度间小波系数的相关性,根据相关性的大小区别小波系数的类型,进行取舍,然后再进行小波重构,从而实现去噪。例如小波隐马尔可夫树去噪方法就是这个原理。

(3) 阈值去噪。阈值去噪是一种实现简单、效果较好的小波去噪方法。其基本思想是对小波分解后的各层系数中模大于或小于某阈值的系数分别处理,然后进行反变换重构出去噪后的信号。

下面主要介绍小波阈值去噪。

7.1.2 小波阈值去噪

进一步将式(7.1.1)写成如下形式

$$s(t)=f(t)+\sigma n(t) \tag{7.1.2}$$

其中 σ 是噪声强度。最简单情况是假设 $n(t)$ 为高斯白噪声,且 $\sigma=1$。小波变换的目的就是抑制 $n(t)$ 以恢复 $f(t)$。在 $f(t)$ 的分解系数比较稀疏(非零项很少)的情况下,这种方法效率很高。

基于小波变换的去噪方法利用小波变换中的变尺度特性,对确定信号有一种“集中”能力。如果一个信号的能量集中于小波变换域少数小波系数上,那么它们的取值必然大于在小波变换域内能量分散后大量信号和噪声的小波系数。这时可用阈值方法对小波分解后的各层系数中模大于和小于某阈值的系数分别处理。

在对小波系数进行取舍前,按一定的规则(或阈值化),将小波系数划分为两类:重要的、规则的小波系数;非重要的或受噪声干扰的小波系数。通常以小波系数的绝对值作为小波的分类依据。小波系数绝对值趋向于零则意味着小波系数所包含的信息量少,并受强烈的噪声干扰。

给定一个阈值 δ,所有绝对值小于 δ 的小波系数划为“噪声”,它们的值用零代替;而超过阈值 δ 的小波系数的数值被缩减后再重新取值(符号为原小波系数的符号)。这种方法意味着,阈值化移去了小幅度的噪声或非期望的信号,经小波逆变换后可以得到所需要的信号。由此可见,在小波分析用于降噪的过程中,核心步骤就是在系数上作用阈值。因为阈值的选取直接影响降噪的质量,人们提出了各种阈值选取的理论和经验模型,但是还没有一种

模型是通用的，它们都有自己的使用范围。

小波变换中，对各层系数降噪所需的阈值一般是根据原信号的信噪比来取的，该量用式(7.1.2)中的 σ 来表示，从 $f(t)$ 中提取 σ 的方法很多，在假设噪声为白噪声的情况下，一般用原信号的小波分解的各层系数的标准差来衡量。MATLAB 提供了 wnoisest 函数来实现这个功能。

在得到信号的噪声强度以后，就可以根据噪声强度 σ 来确定各层的阈值，对噪声强度为 σ 的白噪声，阈值的确定主要有以下几个数学模型。

(1) 默认的阈值确定模型，阈值由如下公式给出：

$$\text{thr}=\sqrt{2\log(n)}\times\sigma \tag{7.1.3}$$

式中，n 为信号的长度，在 MATLAB 的 ddencmp 命令中，如使用其降噪功能，求得的阈值就是用这个规则确定的。

(2) Birge-Massart 策略所确定的阈值通过如下的规则求得：

给定一个指定的分解层数 j，对 $j+1$ 以及更高层，所有系数保留；

对第 i 层($1\leqslant i\leqslant j$)，保留绝对值最大的 n_i 个系数，n_i 由下式确定：

$$n_i=M(j+2-i)^a$$

式中，M 和 a 为经验系数，缺省情况下取 $M=L(1)$，也就是第一层分解后系数的长度，一般情况下，M 满足 $L(1)\leqslant M\leqslant 2\,L(1)$，$a$ 的取值因用途不同，在压缩情况下一般取 $a=1.5$，降噪情况下取 $a=3$。

从原始信号确定阈值的 MATLAB 函数有 ddencmp，wbmpen，wdcbm 和 wdcbm2，其中自动降噪的命令 wdencmp 采用的是默认的阈值。

在求得阈值后，有两种在信号上作用阈值的方法，硬阈值和软阈值。硬阈值是令绝对值小于阈值的信号点的值为零，这种方法的缺点是在某些点会产生间断。另一种软阈值方法是在硬阈值的基础上让边界处不连续点逐渐收缩到零，这样一来可以有效避免间断，使得重建的信号比较光滑。

设 ω 是原始小波系数，$\eta(\omega)$ 表示阈值化后的小波系数，T 是阈值，

$$I(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是真}\\ 0, & x\text{ 是假}\end{cases}$$

I 代表示性函数。

(a) 硬阈值函数如图 7.1(a)所示。

$$\eta(\omega)=\omega I(|\omega|>T) \tag{7.1.4}$$

(b) 软阈值函数如图 7.1(b)所示。

$$\eta(\omega)=(\omega-\text{sgn}(\omega)T)I(|\omega|>T) \tag{7.1.5}$$

硬阈值方法可以很好地保留图像边缘等局部特性，但图像会出现振铃、伪吉布斯效应等视觉失真，而软阈值处理相对要平滑，但可能会造成边缘模糊等失真现象。半软阈值函数如图 7.1(c)所示，可以兼顾软阈值和硬阈值方法的优点，其表达式如下：

$$\eta(\omega)=\text{sgn}(\omega)\frac{T_2(|\omega|-T_1)}{T_2-T_1}I(T_1<|\omega|<T_2)+\omega I(|\omega|>T_2) \tag{7.1.6}$$

其中 $0<T_1<T_2$。

虽然半软阈值方法能表现出较好的去噪效果，但是它将要估计两个阈值，实现起来较困

难,因此这个缺点限制了它的应用。一种改进的具有更高阶的软阈值如图 7.1(d)所示,其表达式为

$$\eta(\omega)=\begin{cases}\omega+T-\dfrac{T}{2k+1}, & \omega<-T\\ \dfrac{1}{(2k+1)T^{2k}}\omega^{2k+1}, & |\omega|\leqslant T\\ \omega-T+\dfrac{T}{2k+1}, & \omega>T\end{cases} \tag{7.1.7}$$

可以看出它在噪声(小波系数)与有用信号(小波系数)之间存在一个平滑过渡区,更符合自然图像的连续特性。

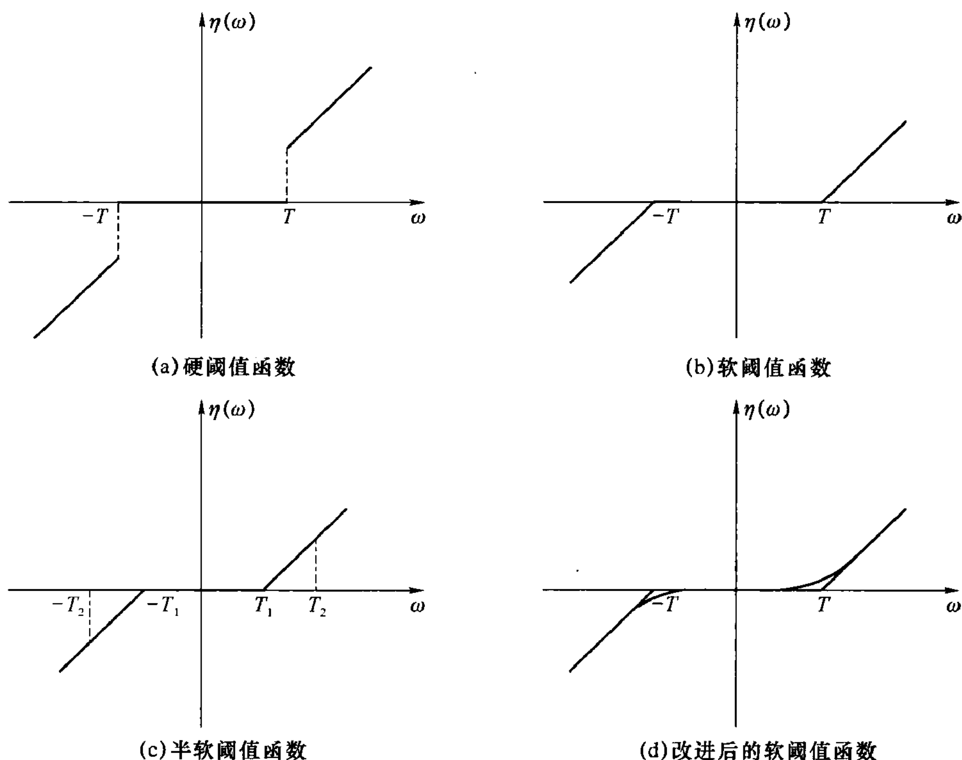


图 7.1 几种阈值函数

对特定的信号作用阈值的 MATLAB 命令为 wthresh。下面通过 MATLAB 观察一下硬阈值和软阈值的图形表示。

```
%产生一条定义在[-1,1]上的直线
y = linspace(-1,1,100);
%定义阈值为 0.4
thr = 0.4;
%作用硬阈值
ythard = wthresh(y,'h',thr);
%作用软阈值
ytsoft = wthresh(y,'s',thr);
```

```
subplot(121); plot(ythard);title('作用硬阈值的结果','fontsize',18)
subplot(122); plot(ytsoft);title('作用软阈值的结果','fontsize',18)
```

在图 7.2 中，横坐标表示信号（或图像）的原始小波系数，纵坐标表示阈值化后的小波系数。

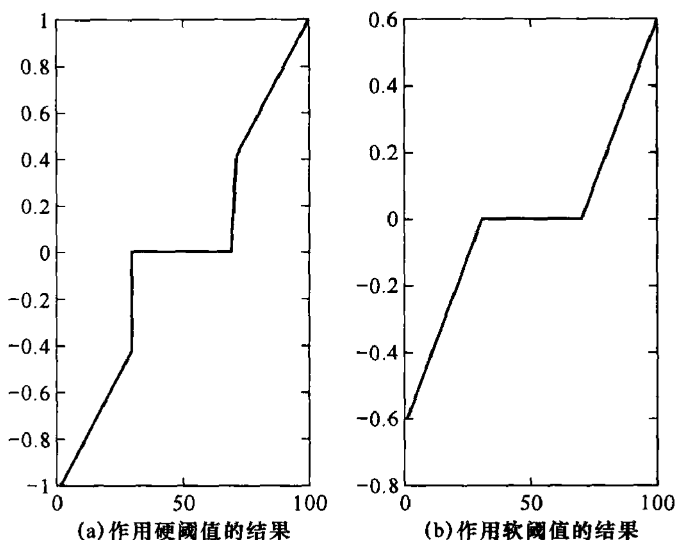


图 7.2　对直线作用硬阈值和软阈值的结果

基于小波变换的阈值去噪方法步骤如下：

（1）选择合适的小波，对所给的信号进行小波变换，得到小波变换系数 W；

（2）计算小波阈值 δ，选择合适的阈值方法（软阈值或者硬阈值），对小波系数进行取舍，得到新的小波系数 W_δ；

（3）对得到的小波系数 W_δ 进行逆小波变换，得到去噪后的图像。

去噪时，假定已估计出了噪声的方差，问题已经可以解决。在实际应用中，如何确定噪声的类型以及方差是一个非常重要的问题，在此不进行讨论。

7.1.3　一维信号阈值去噪例子

1. 平稳信号去噪

［**例 7-1**］　某单位为了考察其用电情况，对其中三天的电网电压值进行监测，得到了一个电压采样序列，但由于在采样过程中，监测设备出现了一些故障，使得所采集的信号引入了噪声，现利用小波分析，将这种由于仪器故障引起的噪声进行消噪处理。

解：该问题是一个去噪问题，利用小波去噪的基本原理，首先我们选择一个小波 db1，然后确定小波分解的层数 N（在这里，取 N 为 3）。可以采用 3 种方法进行处理。

（1）强制消噪处理。该方法把小波分解结构中的高频系数全部变 0，即把高频部分全部滤除掉，然后再对信号进行重构处理。这种方法比较简单，重构后的去噪信号也比较平滑，但容易丢失信号的有用成分。

（2）默认阈值消噪处理。该方法利用 ddencmp 函数产生信号的默认阈值，然后利用

wdencmp 函数进行消噪处理。

(3) 给定软(或硬)阈值消噪处理。在实际的消噪处理过程中,阈值往往可以通过经验公式获得,而且这种阈值比默认阈值更具有可信度。在进行阈值量化处理中可用 wthresh 函数进行。

针对本问题,这里分别用上面 3 种消噪方法进行消噪处理,并对消噪的结果加以对比。

```
%采集的信号已经按照 MATLAB 格式存成 MAT 文件,文件名为 leleccum.mat
load leleccum;                     %将信号装入 MATLAB 工作环境
s = leleccum(1:3 920);             %取采样信号的前 1～3 920 个采样点
is = length(s);                    %计算采样序列长度
subplot(221);plot(s);              %画出原始信号波形
title('原始信号');
[c,l] = wavedec(s,3,'db1');        %采用 db1 小波并对信号进行三层分解
ca3 = appcoef(c,l,'db1',3);        %提取小波分解的低频系数
cd3 = detcoef(c,l,3);              %提取第三层的高频系数
cd2 = detcoef(c,l,2);              %提取第二层的高频系数
cd1 = detcoef(c,l,1);              %提取第一层的高频系数
%下面对信号进行强制消噪处理
cdd3 = zeros(1,length(cd3));
cdd2 = zeros(1,length(cd2));
cdd1 = zeros(1,length(cd1));
c1 = [ca3,cdd3,cdd2,cdd1];
s1 = waverec(c1,l,'db1');          %[c1,l]为新的分解结构
subplot(222);plot(s1);             %画出对信号进行强制消噪的波形图
title('强制消噪波形图');grid;
%下面利用默认阈值进行消噪处理
%用 ddencmp 函数获得信号的默认阈值,使用 wdencmp 命令函数来实现消噪过程
[thr,sorh,keepapp] = ddencmp('den','wv',s);
s2 = wdencmp('gbl',c,l,'db1',3,thr,sorh,keepapp);
subplot(223);plot(s2);
title('默认阈值消噪后的信号');grid;
%下面利用给定的软阈值进行消噪
cd1soft = wthresh(cd1,'s',1.456);  %对第一层的高频系数,阈值取为
cd2soft = wthresh(cd2,'s',1.832);  %对第二层的高频系数,阈值取为
cd3soft = wthresh(cd3,'s',2.786);  %对第三层的高频系数,阈值取为
s3 = waverec(c1,l,'db1');          %[c1,l]为给定阈值量化后的分解结构
subplot(224);plot(s3);
title('给定软阈值消噪后的信号');grid;
```

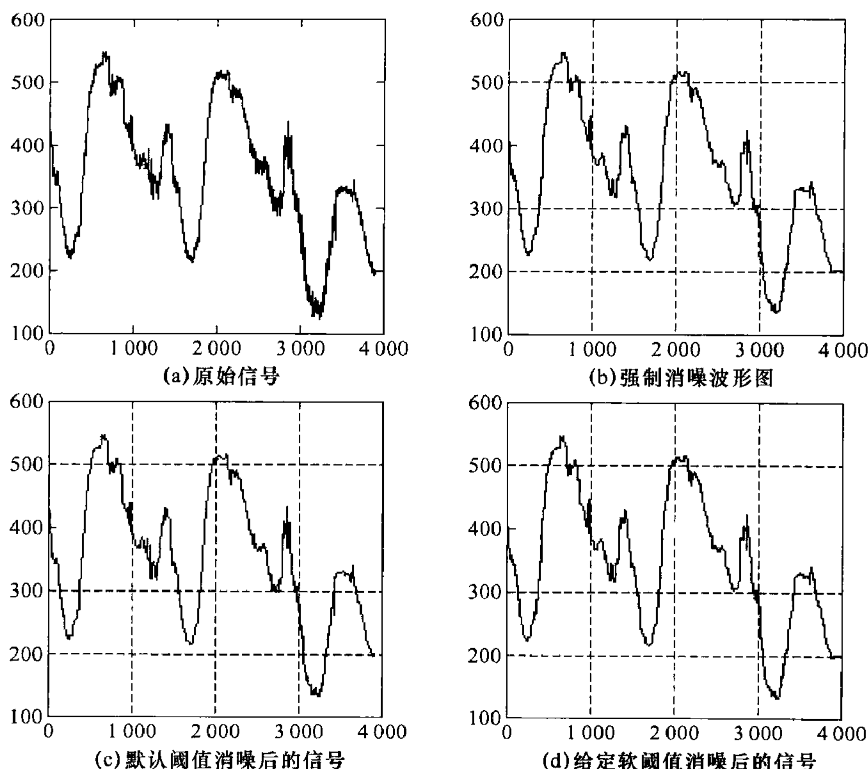


图 7.3 信号及其消噪的输出结果

2. 非平稳信号去噪

在实际的工程应用中，所分析的信号可能包含许多尖峰或突变部分，并且噪声也不是平稳的白噪声，对这种信号进行分析，首先需要作信号的预处理，将信号的噪声部分去除，提取有用信号。而这种信号的消噪，用传统的傅里叶变换分析，显得无能为力，因为傅里叶分析是将信号完全在频率域中进行分析，它不能给出信号在某个时间点上的变化情况，使得信号在时间轴上的任何一个突变，都会影响信号的整个谱图。而小波分析由于能同时在时频域中对信号进行分析(并且在频率域内分辨率高时，时间域内分辨率则低，在频率域内分辨率低时，时间域内分辨率则高，且有自动变焦的功能)，所以它能有效地区分信号中的突变部分和噪声，从而实现信号的消噪。下面将一个信号加入白噪声，然后用傅里叶分析方法和小波分析方法同时对加入白噪声的信号进行消噪处理，可以看出小波分析比传统的傅里叶分析更加优越。

[**例 7-2**] 产生一含噪声的矩形波信号，请分别用小波分析和傅里叶变换进行信号噪声消除。

解：该问题是一个非平稳信号噪声消除的问题，可按如下程序进行噪声消除。

```
snr = 4;                          % 设置信噪比
init = 2055615866;                % 设置随机数初值
% 产生原始信号 xref 和含白噪声信号 x
[xref,x] = wnoise(1,11,snr,init);
xref = xref(1:2000);
x = x(1:2000);
```

```
%用 sym8 小波进行三层分解并用 heursure 软阈值进行小波系数阈值量化
xd = wden(x,'heursure','s','one',3,'sym8'); %进行消噪处理
subplot(3,2,1);plot(xref);
title('原始信号');
subplot(3,2,2);plot(x);
title('含噪声信号');
%下面用傅里叶变换进行信号噪声消除
xxref = fft(xref);                        %对原始信号进行傅里叶变换
xxref = abs(xxref);
xx = fft(x);                              %对含噪信号进行傅里叶变换
absxx = abs(xx);
%下面画出傅里叶变换后的频谱图
subplot(3,2,3);plot(xxref);
title('原始信号的谱图');
subplot(3,2,4);plot(absxx);
title('含噪信号的谱图');
%进行低通滤波,滤波频率为 0～100 的相对频率
indd2 = 100:2000;
xx(indd2) = zeros(size(indd2));
xden = ifft(xx);                          %进行傅里叶反变换
xden = real(xden);                        %提取反变换后的实数部分
xden = abs(xden);
subplot(3,2,5);plot(xd);
title('小波去噪后的信号');
subplot(3,2,6);plot(xden);
title('用傅里叶分析去噪的效果');
```

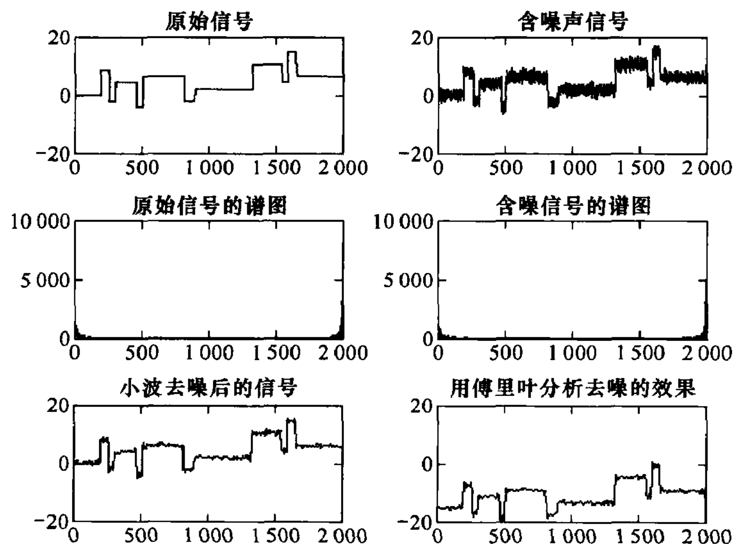


图 7.4 例 7.2 的输出结果

7.1.4 二维信号的小波去噪

二维信号在应用中一般表现为图像信号,二维信号在小波域中的降噪方法的基本思想与一维情况一样,在阈值的选择上,可以使用统一的全局阈值,也可以对水平方向、竖直方向和对角方向三个方向的高频系数分别进行阈值处理。这样就可以把所有方向的噪声分离出来,通过作用阈值抑制其成分。

图像去噪的一般步骤如下:

(1) 图像的小波分解。选择合适的小波函数以及合适的分解层次对图像进行分解。

(2) 对分解后的高频系数进行阈值处理。对分解的每一层,选择合适的阈值对该层的水平、垂直和对角三个方向的高频系数进行阈值量化处理。阈值函数和阈值选择规则与信号的阈值去噪相同。

(3) 重构图像。根据小波分解的低频系数和经阈值量化处理后的高频系数进行图像重构。

[**例 7-3**] 给定一个含噪声的 woman.mat 图像,利用 wdcbm2 获取图像去噪阈值,然后采用函数 wdencmp 实现图像去噪。

```
load woman;
%产生含噪信号
init = 2055615866;
randn('seed',init);
x = X + 18 * randn(size(X));
nbc = size(map,1);
%使用 sym4 小波进行三层分解
wname = 'sym4';lev = 3;
[c,s] = wavedec2(x,lev,wname);
%使用 wdcbm2 获得去噪阈值
alpha = 3;m = 3.5 * prod(s(1,:));
[thr,nkeep] = wdcbm2(c,s,alpha,m);
%对信号进行去噪
sorh = 's';
xd = wdencmp('lvd',c,s,wname,lev,thr,sorh);
colormap(pink(nbc));
figure(1);
subplot(2,2,1);
image(wcodemat(X,nbc));
title('原始信号');
subplot(2,2,2);
image(wcodemat(x,nbc));
title('含噪信号');
subplot(2,2,3);
```

```
image(wcodemat(xd,nbc));
title('消噪后的信号');
```

输出结果如图 7.5 所示。

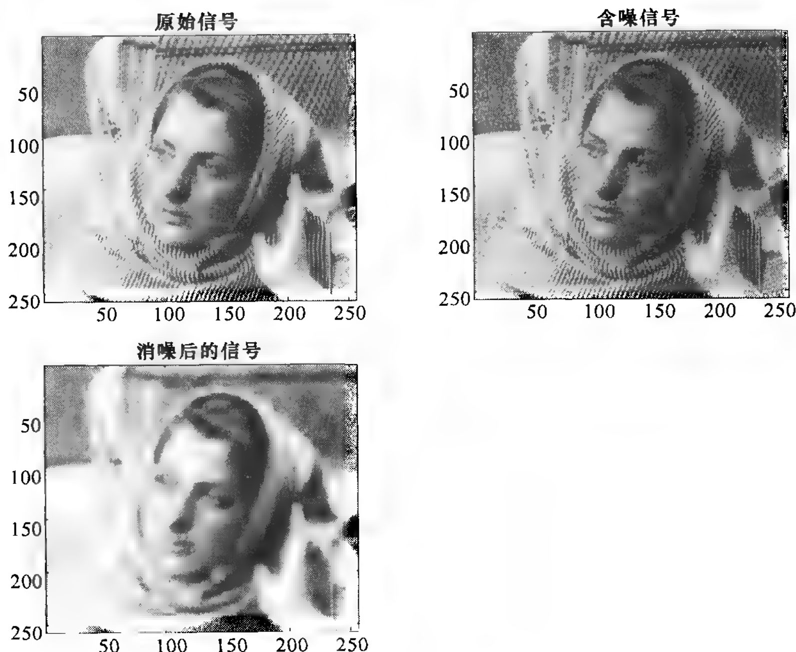


图 7.5 例 7.3 的图像去噪输出结果

[**例 7-4**] 给定一个含噪声的 woman. mat 图像,对小波分解系数使用系数 wthcoef2 进行阈值处理,然后利用阈值处理后的小波系数进行小波重构达到去噪目的。

```
%加载原始信号
load woman;
%产生含噪图像
init = 2055615866;randn('seed',init);
x = X + 18 * randn(size(X));
[c,s] = wavedec2(x,3,'sym4');
%设置尺度向量
n = [1,2,3];
%设置阈值向量
p = [150,120,60];
%对高频系数进行阈值处理
nc = wthcoef2('d',c,s,n,p,'s');
%对新的分解结构进行重构
rx = waverec2(nc,s,'sym4');
nbc = size(map,1);
colormap(pink(nbc));
```

```
subplot(2,2,1);
image(wcodemat(X,nbc));
title('原始信号');
subplot(2,2,2);
image(wcodemat(x,nbc));
title('含噪信号');
subplot(2,2,3);
image(wcodemat(rx,nbc));
title('消噪后的信号');
```

输出结果如图 7.6 所示。

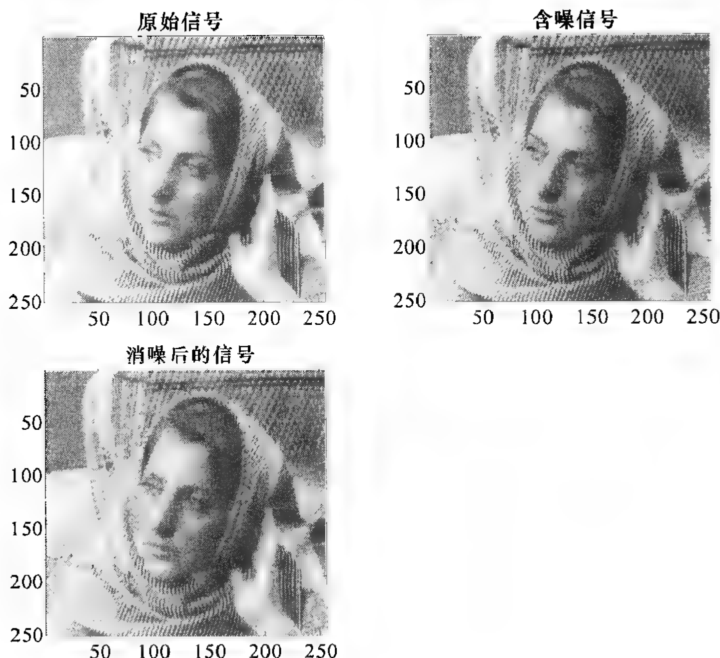


图 7.6　例 7.4 的输出结果

7.2　小波在信号压缩中的应用

信号和图像处理中另一类重要问题就是信号压缩的问题。其基本目标就是在不损失信号所携带的信息的前提下，尽可能地减少用于存储信号的开销。

小波分析用于信号与图像压缩是小波分析应用的一个重要方面。小波变换实现数据压缩的基本目标是使得信号在时间-频率域的分解系数所占的存储空间尽可能小，同时还要保证压缩后的系数能精确地反映原信号所携带的信息。它的特点是压缩比高，压缩速度快，压缩后能保持信号与图像的特征不变，且在传递中可以抗干扰。基于小波分析的压缩方法很多，比较成功的有小波包最优基方法，小波域纹理模型方法，小波变换零树压缩，小波变换向量压缩等。

信号的压缩是基于信号存在冗余这种特性。多媒体数据中的数据量并不完全等于它们

所携带的信息量。冗余是指信息存在的各种性质的多余度。压缩就是去掉信息中的冗余，即去掉确定的信息(可推知的)，保留不确定的信息，也就是用一种更接近信息本身的描述来代替原信号。

一般情况下，图像、视频、数据中存在的数据冗余类型主要包括：

(1) 空间冗余

在同一幅图像中，规则物体或规则背景的物理表面特性具有的相关性，这种相关性会使它们的图像结构趋于有序和平滑，表现出空间数据的冗余。邻近像素灰度分布的相关性很强。

(2) 时间冗余

反映在视频图像序列中，相邻图像之间有较大的相关性。一帧图像中的某物或场景可由其他帧图像中的物体或场景重构出来。

(3) 信息熵冗余

指数据所携带的信息量少于数据本身而反映出来的数据冗余。

(4) 视觉冗余

人类的视觉系统由于受生理特性的限制，对于图像的注意是非均匀的，人眼并不能察觉图像中的所有变化。

(5) 听觉冗余

人耳对不同频率的声音的敏感性是不同的，不能察觉所有频率的变化，对某些频率不必特别关注，因此存在听觉冗余。由于声音的掩蔽效应，被掩蔽信号实际上也是没有必要存储或传输的。

(6) 知识冗余

数据的理解与先验知识有相当大的关系。例如，当接到一个成语的前三个字“大惊小”时，立刻就会知道下一个字肯定是“怪”，这时最后一个字母就不携带任何信息量了，只要抓住了它们的某些特征就能加以识别而无须更多的数据量。

7.2.1 信号压缩的性能度量

图像信号在编码和传输过程中会产生误差，尤其是在熵压缩编码中，产生的误差应在允许的范围内。数据压缩编码的优劣主要由压缩比以及从压缩后的数据所恢复的图像的质量两个方面来衡量。

因此，类似于信号降噪，信号压缩也应该从两个方面来度量某种算法的性能，即压缩比和误差。在一般情况下，这两者在本质上是矛盾的，这就需要我们在其间做权衡。除此之外，算法的复杂性、延时等也是应当考虑的因素。

(1) 压缩误差

设原始信号为 f，压缩后的信号为 $\hat{f}$，则定义误差函数为

$$a_N(f)_\chi = \inf_{\hat{f}\leqslant N} \| f-\hat{f} \| \tag{7.2.1}$$

在使用的压缩方法保留的系数不超过 N 的情况下，a_N 度量了该压缩算法的误差。在这个意义下，通过 $a_N(f)_\chi$ 的衰减速度来定义压缩算法的性能。如果 $a_N(f)_\chi$ 满足：

$$a_N(f)_\chi = O(N^{-\alpha})$$

随着 N 的增加，$a_N(f)_\chi$ 以 N 的多项式的速度衰减，那么一个算法如果包含了其他算法的 α 类，则说明前一个算法较优。

(2) 平均码字长度

设 β_i 为数字图像中灰度级 d_i 所对应的码字长度(二进制代码的位数)。其相应出现的概率为 $P(d_i)$,则该数字图像所赋予的平均码字长度为

$$R = \sum_{i=1}^{m} \beta_i P(d_i) \tag{7.2.2}$$

(3) 编码效率

$$\eta = \frac{H}{R} \times 100\% \tag{7.2.3}$$

其中 H 是图像的熵,定义为

$$H = -\sum_{i=1}^{m} P(d_i) \mathrm{lb} P(d_i) \quad \text{bit/ 字符}$$

根据信息论中信源编码理论,可以证明在 $R \geqslant H$ 条件下,总可以设计出某种无失真编码方法。当然如果编码结果使 R 远大于 H,表明这种编码方法效率很低,占用比特数太多。最好编码结果使 R 等于或接近于 H。这种状态的编码方法,称为最佳编码。

(4) 压缩比

压缩比是指编码前后平均码长之比,如果用 n 表示编码前每个符号的平均码长,通常为用自然二进制码表示时的位数,则压缩比可表示为

$$r = \frac{n}{R} \tag{7.2.4}$$

一般来讲,压缩比大,则说明被压缩掉的数据量多。一个编码系统要研究的问题是设法减小编码平均长度 R,使编码效率 η 尽量趋于 1,而冗余度趋于 0。

7.2.2 信号压缩的实现方法

在小波变换中,信号压缩可以归结为在信号的小波分解域中对小波系数进行量化的过程。由于量化的过程可以看做是系数的内部扰动,所以小波域中系数对扰动的稳定性是至关重要的。对于实现来讲,一个首要的问题就是用更少的位来存储小波系数并尽量保证重建的质量。

为了实现信息的分离,减少存储或传输的代价,压缩后用以压缩或传输的数据应该是小波域经过量化以后的数据。一种简单的量化方法叫做归一化量化方法,其基本思想是把整个系数的值域分解为不同的区间,各区间所有值出现的概率之和相同,且对每个区间的值用相同的位数加以量化。

信号压缩的具体流程如图 7.7 所示。

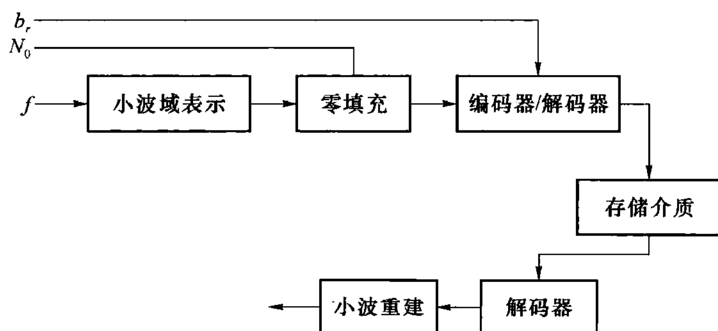


图 7.7　小波变换用于数据压缩的基本流程

图中各部分的含义如下。

- 信号 f,被压缩的原始信号,在小波分解域中是时频一致的;
- 小波表示,通过小波基 ψ 作用得到的信号 f 在小波域的分解系数;
- 零填充,去除采样过程中的时间冗余,对采样率为 N_0 的情况,作用如下算式:

$$(Z_{N_0}c)_n=\begin{cases}c_n, & n=kn_0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

- 编码器/量化器,对输入系数进行编码,去除其编码冗余。并根据需要进行量化;
- 存储介质;
- 解码器,将编码后的系数重新恢复到小波表示域,便于小波重建过程;
- 小波重建,恢复压缩后的信号。

7.2.3 小波基的选择

在选择小波基进行信号压缩的过程中,还有一个问题需要考虑,就是正交小波和双正交小波之间的选择,在前面我们已经讲过,正交小波除 Haar 小波外都不具有对称性,那么对其小波系数的修改就可能导致信号频谱产生偏移而改变信号的一些固有性质。

而双正交小波都可以构造成为对称的、具有线性相位的滤波器,这样把原信号变换到小波域以后,任何对系数的处理都只改变信号的幅值,而不改变信号的频率分布。

关于正交小波和双正交小波在信号压缩中的优点和不足可以总结如下:

(1) 正交小波的各组基之间是相互正交的,所以小波分解系数也是独立的,最大限度地去掉了信息冗余。但一般不具有广义线性相位;

(2) 双正交小波具有线性相位滤波器,在做变换的过程中只调幅不调频,能很好地保持信号本身的性质,但小波基存在冗余,不完全正交。

在实际的信号压缩标准中(如 JPEG2000),一般采用支集长度为 9 或 7 的双正交小波,从视觉心理的观点看,正交小波在两个通道(伸缩和平移)的信息完全分离开来,而双正交小波在平移的通道间还存在冗余,也就是说如果某些信息损坏,还可以通过其他信息恢复出来,所以容错性比较好,因此更适合实际的应用。

7.2.4 MATLAB 小波工具箱中信号压缩的实现

MATLAB 小波工具箱进行数据压缩基于的基本假设是,在信号的小波分解系数中,信号可以用近似系数加部分的细节系数来表示,而不会损失很多信息。

在 MATLAB 中,信号压缩的实现步骤与信号降噪的相同。

(1) 对原始信号进行小波分解,得到分解系数;

(2) 对小波域中的系数进行处理,去除信号中的冗余;

(3) 重建分解后的系数,得到压缩后的信号。

这三个步骤中与降噪过程不同的步骤是第二步,在降噪过程中,是通过对分解系数作用阈值来实现的,因为在降噪中阈值的选取是通过对噪声的估计来实现的,而在压缩过程中,我们可以指定压缩的一些参数,来获得需要的压缩比、误差等性能指标。

在 MATLAB 中,对压缩过程的性能度量有如下几个参数。

(1) 能量剩余

对正交小波:

$$能量保留成分=100\%\times\frac{处理过的小波系数的模平方}{原信号的模平方}$$

对双正交小波，由于分解系数之间存在冗余，所以我们用能量比来定义：

$$能量保留成分=100\%\times\frac{压缩信号的模平方}{原信号的模平方}$$

(2) 小波域的模平方比

这个参数用来调节整个算法的性能，定义为

$$小波域的模平方比=100\%\times\frac{处理后的小波系数的模平方}{原信号小波系数的模平方}$$

(3) 零系数成分

该系数用来确定在作用阈值过程中，有多少个系数被置零，定义为

$$零系数成分=\frac{处理后的系数中 0 的个数}{原信号的分解系数的个数}\times 100\%$$

1. 一维信号压缩的例子

下面是一个一维信号小波压缩的例子，将以上几个参数作为基础，来说明小波压缩的性能。

```
%读入信号 leleccum
load leleccum;
indx = 2600:3100;
%取其中一段信号
x = leleccum(indx);
%使用 db3 小波对信号进行 3 层小波分解
n = 3;w = 'db3';
[c,l] = wavedec(x,n,w);
%指定不同的阈值对系数进行处理
keepapp = 1;
thr 1 = 35;
[xd1,cxd,lxd,perf01,perfl21] = wdencmp('gbl',c,l,w,n,thr1,'h',keepapp);
thr2 = 20;
[xd2,cxd,lxd,perf02,perfl22] = wdencmp('gbl',c,l,w,n,thr2,'h',keepapp);
thr3 = 15;
[xd3,cxd,lxd,perf03,perfl23] = wdencmp('gbl',c,l,w,n,thr3,'h',keepapp);
%输出压缩结果
subplot(411);plot(x);title('原始信号');
subplot(412);plot(xd1);title('不同阈值下的压缩信号');
xlabel(['能量剩余',num2str(perfl21),'零成分系数',num2str(perf01)]);
subplot(413);plot(xd2);
xlabel(['能量剩余',num2str(perfl22),'零成分系数',num2str(perf02)]);
subplot(414);plot(xd3);
xlabel(['能量剩余',num2str(perfl23),'零成分系数',num2str(perf03)]);
```

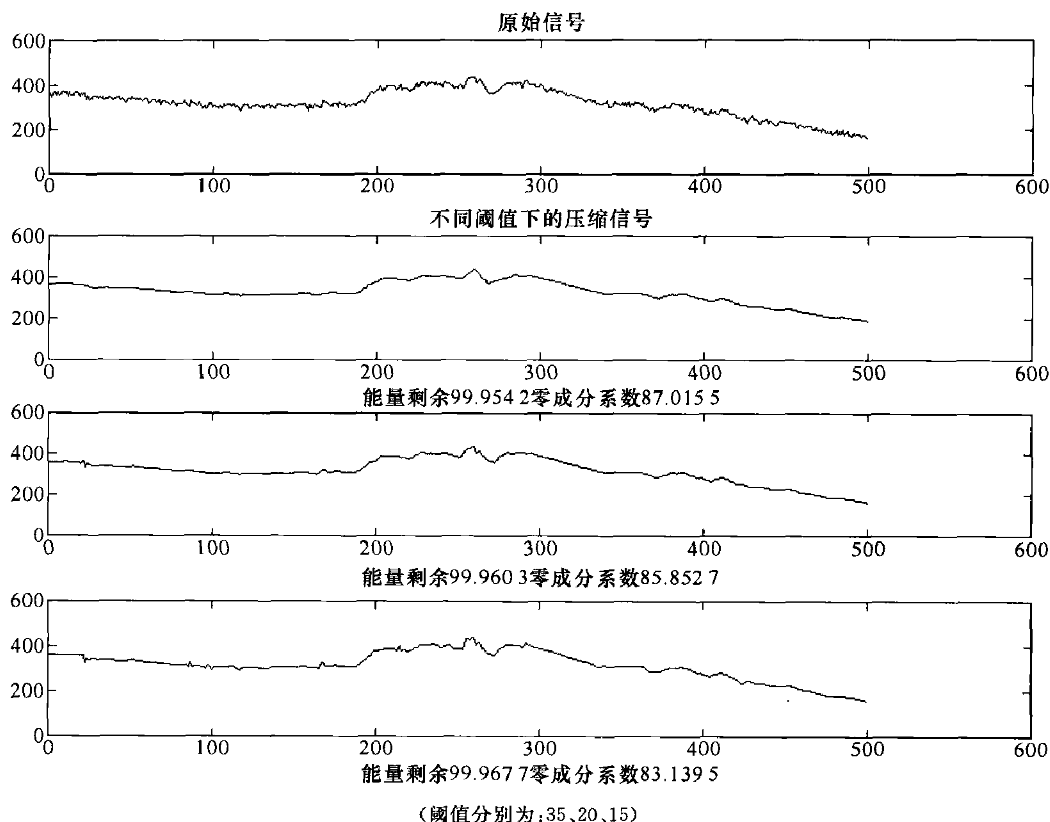


图 7.8　使用 db3 对 lelecuucm 信号分别作用不同阈值的压缩结果

从这个例子我们也可以看出小波变换用于数据压缩的基本思想，就是通过低采样率的近似系数(分解层数为 j 时，其近似系数就相当于在 2^j 采样率下对信号的采样值)，加上少量我们关心的近似系数所组成的，而信号其他的细节系数不是信号的主要性质，都通过作用阈值过滤掉了。

在本例中，阈值的作用方式使用的是全局阈值，可能对信号的局部性质刻画的不够精细，可以利用分层阈值实现信号压缩。

2. 二维信号压缩的例子

同降噪过程的一维到二维的推广类似，二维信号的压缩同样也是对三组细节系数的阈值化的过程。同样由于二维信号的关联包括三个方向，所以为了提高压缩性能，需要在三个方向做阈值化处理。

下面我们利用小波变换的时频局部化特性，举一个局部压缩的例子，大家可以通过这个例子看出小波变换应用在这类问题上的优越性。

```
load wbarb;
[ca1,ch1,cv1,cd1] = dwt2(X,'sym4');
codca1 = wcodemat(ca1,192);
codch1 = wcodemat(ch1,192);
codcv1 = wcodemat(cv1,192);
```

```
codcd1 = wcodemat(cd1,192);
%将四个系数图像组合为一个图像
codx = [codca1,codch1;codcv1,codcd1];
%复制原图像的小波系数
rca1 = ca1;
rch1 = ch1;
rcv1 = cv1;
rcd1 = cd1;
%将一个细节系数的中部置0
rch1(33:97,33:97) = zeros(65,65);
rcv1(33:97,33:97) = zeros(65,65);
rcd1(33:97,33:97) = zeros(65,65);
codrca1 = wcodemat(rca1,192);
codrch1 = wcodemat(rch1,192);
codrcv1 = wcodemat(rcv1,192);
codrcd1 = wcodemat(rcd1,192);
%将处理后的系数图像组合为一个图像
codrx = [codrca1,codrch1;codrcv1,codrcd1];
%重建处理后的系数
rx = idwt2(rca1,rch1,rcv1,rcd1,'sym4');
subplot(221);image(wcodemat(X,192)),colormap(map);title('原始图像');
subplot(222);image(codx),colormap(map);title('一层分解后各层系数图像');
subplot(223);image(wcodemat(rx,192)),colormap(map);title('压缩像');
subplot(224); image(wcodemat(codrx, 192)), colormap(map); title('处理后各层系数
图像');
%求压缩信号的能量成分
per = norm(rx)/norm(X);
%求压缩信号与原信号的标准差
err = norm(rx - X);


err =
586.4979
```

运行结果如图 7.9 所示。

从图 7.9 可以看出，小波域的系数表示的是原图像各频率段的细节信息，并且给我们提供了一种位移相关的信息表述方式，可以通过对局部细节系数的处理来达到局部压缩的效果。



图 7.9 小波分析用于图像局部压缩的例子

在本例中，我们把图像中部的细节系数都置零，从压缩图像中可以很明显地看出只有中间部分变得模糊（比如在原图中很清晰的围巾的条纹不能分辨），其他部分的细节信息仍然可以分辨的很清楚。

本例只是为了演示小波分析应用在图像局部压缩的方法，在实际的应用中，可能不会只做一层变换，而且作用阈值的方式可能也不会是将局部细节系数全部清除，更一般的情况是在 N 层变换中通过选择零系数比例或能量保留成分作用不同的阈值，实现分片的局部压缩。而且，作用的阈值可以是方向相关的，即在三个不同方向的细节系数上作用不同的阈值。

由于阈值处理只关心系数的绝对值，并不关心系数的位置，所以二维小波变换系数的阈值化方法同一维情况大同小异，为了方便用户使用小波工具箱，对某些阈值化方法提供了专门的二维处理命令。例如阈值化命令 wthcoef2 和阈值确定命令 wdcbm2。

下面通过一个例子来说明二维信号的小波压缩的一般方法，在这个例子中同时采用求缺省阈值的 ddencmp 命令和基于经验公式的 wdebm2 命令对图像进行压缩，并对压缩效果进行比较。

```
load detfingr
% 求得颜色映射表的长度，以便后面的转换
nbc = size(map,1)
% 用缺省方式来求出图像的全局阈值
[thr,sorh,keepapp] = ddencmp('cmp','wv',X)
% 对图像作用全局阈值
[xd,cxd,lxd,perf0,perfl2] = wdencmp('gbl',X,'bior3.5',3,thr,sorh,keepapp)
% 用 bior3.5 小波对图像进行 3 层分解
[c,s] = wavedec2(X,3,'bior3.5');
% 指定 Brige - Massart 策略中的经验系数
```

```
alpha = 1.5;m = 2.7 * prod(s(1,:));
%根据各层小波系数确定分层阈值
[thr1,nkeep] = wdcbm2(c,s,alpha,m);
%对原图像作用分层阈值
[xd1,cxd1,sxd1,perf01,perfl21] = wdencmp('lvd',c,s,'bior3.5',3,thr1,'s');
%将颜色映射表转换为灰度映射表
colormap(pink(nbc));
subplot(221);image(wcodemat(X,nbc));title('原始图像');
subplot(222);image(wcodemat(xd,nbc));
title('全局阈值化压缩图像');xlabel(['能量成分',num2str(perfl2),'%','零系数
成分',num2str(perf0),'%']);
subplot(223);image(wcodemat(xd1,nbc));
title('分层阈值化压缩图像');xlabel(['能量成分',num2str(perfl21),'%','零系数
成分',num2str(perf01),'%']);
```

运行结果如下：

```
thr =
  3.5000
thr1 =
    14.7026   68.4907   93.8430
    14.7026   68.4907   93.8430
    14.7026   68.4907   93.8430
```

显示结果如图 7.10 所示。

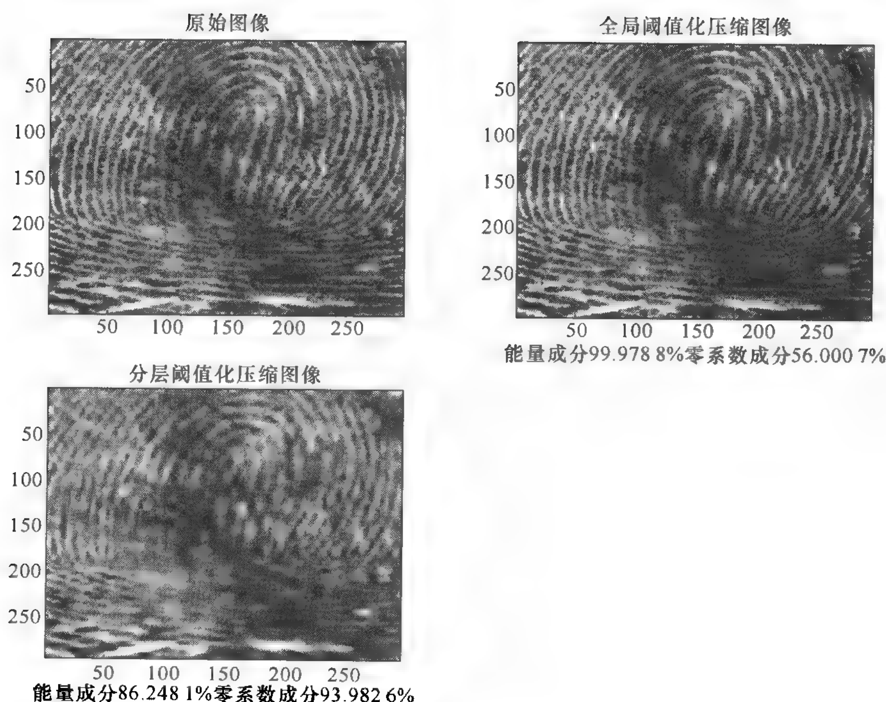


图 7.10　detfingr 图像的全局阈值化压缩和分层阈值化压缩

可见分层阈值化压缩方法同全局阈值化方法相比，在能量损失不是很大的情况下可以获得更高的压缩比，这主要是因为层数和方向相关的阈值化方法能利用更精细的细节信息进行阈值化处理。

7.2.5 基于小波包变换的图像压缩

由于小波包对信号进行了更细致的频率划分，将不同的频率分量分解到相应的频段上，这些分量具有不同的频率特性，其小波包分解系数间的关系也不一样，对每个结点上的分解系数分别设定阈值，将更有利于保留有用信息，舍弃噪声点，因此比直接小波分解进行压缩和采用统一的阈值进行压缩的效果更好。

小波包包含很多基，并且能在一个给定尺度提供一种更好的分析频率成分瞬变的方法。这点可通过对平滑与细节都进行更进一步的滤波，结果先保存下来，然后按某种代价函数寻求最优基来实现。

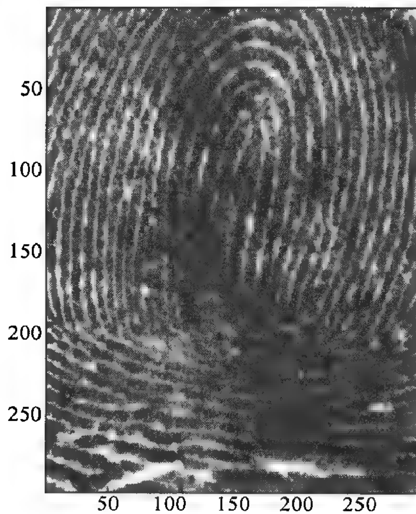
```
%读入信号 detfingr;
load detfingr;
%求颜色索引长度
nbc = size(map,1);
%得到信号的阈值,保留层数,小波树优化标准
[thr,sorh,keepapp,crit] = ddencmp('cmp','wp',X)
thr =
    3.5000
sorh =
h
keepa PP =
    1
crit =
threshold
%通过以上得到的参数对信号进行压缩
[xd,treed,perf0,perfl2] = wpdencmp(X,sorh,4,'sym4',crit,thr * 2,keepapp);
%更改索引表为 pink 索引表
colormap(pink(nbc));
subplot(121);image(wcodemat(X,nbc));title('原始图像');
subplot(122);image(wcodemat(xd,nbc));title('全局阈值化压缩图像');
xlabel(['能量成分',num2str(perfl2),'%','零系数成分',num2str(perf0),'%']);
plot(treed);
```

运行结果如下：

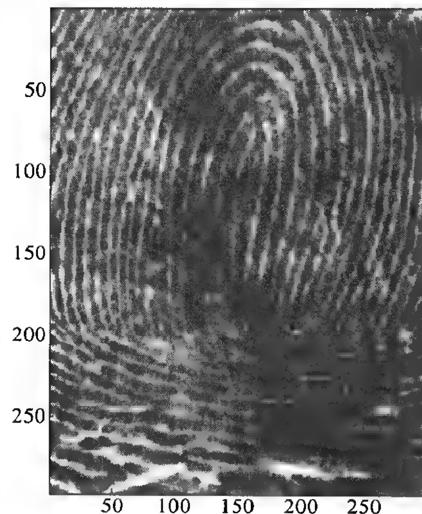
```
thr =
    3.5000
sorh =
```

```
keepapp =
     1
crit =
     threshold
```

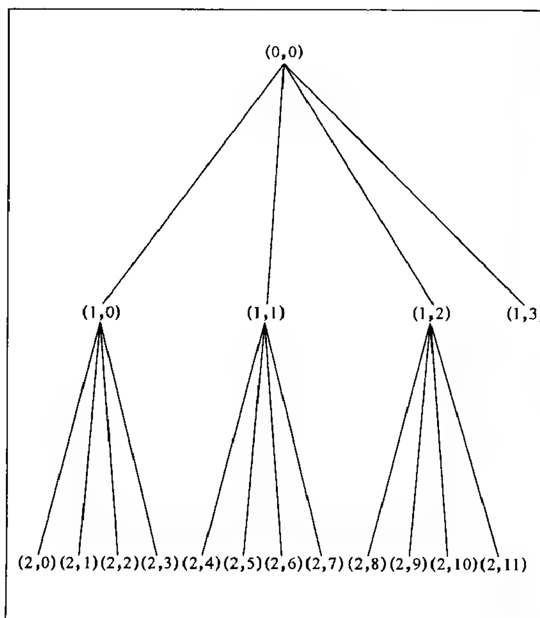
得到的压缩结果如图 7.11 所示。



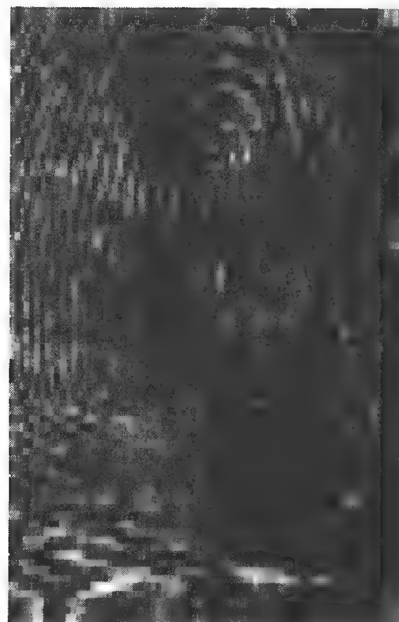
(a) 原始图像



(b) 全局阈值化压缩图像



(c) 小波包分解



(d) (2，0)节点图

图 7.11　使用小波包压缩 detfingr 信号的结果

7.3 小波信号奇异性检测与图像边缘检测

信号中的奇异点及不规则的突变部分经常带有比较重要的信息，它是信号重要的特征之一。比如，在故障诊断（特别是机械故障诊断）中，故障通常表现为输出信号发生突变。对图像信号而言，剧烈变化的部分如边缘和轮廓携带了重要的特征信息，所以对它们的检测在图像数据压缩、模式识别和机器视觉等领域都有着非常重要的意义。长期以来，傅里叶变换是研究函数奇异性的主要工具，其方法是研究函数在傅里叶变换域的衰减以推断函数是否具有奇异性及奇异性的大小。但傅里叶变换缺乏空间局部性，它只能确定一个函数奇异性的整体性质，而难以确定奇异点在空间的位置及分布情况。由于小波变换具有空间局部化性质，因此，利用小波变换来分析信号的奇异性以及奇异性的位置和奇异度的大小将更加有效。

Lipschitz 指数被用来定量描述函数的奇异性。当尺度越来越精细时，小波变换模的极大值将收敛于信号的奇异点，其衰减速度取决于信号在奇异点的 Lipschitz 指数。所以，利用小波变换检测信号的奇异性，不仅可以确定奇异发生的时间，而且可以进一步判断奇异的性质。

7.3.1 Lipschitz 指数与奇异性

定义 7.3.1 令 $0\leqslant\alpha<1$ ，如存在一个常数 C，使

$$\forall t\in\mathbf{R}, |f(t)-f(t_0)|\leqslant C|t-t_0|^\alpha \tag{7.3.1}$$

成立，则称 $f(t)$在点 t_0 是 Lipschitz α 的。如对所有的 $t_0\in[a,b]$和一个与 t_0 无关的常数 C，使得式(7.3.1)成立，则称 $f(t)$在区间$[a,b]$是一致 Lipschitz α 的。α 的上界值称为 Lipschitz奇异性。

不难理解，如果 $f(t)$在点 t_0 可微，则其 Lipschitz 指数至少为 1。粗略地说，如 $\alpha=1$，则式(7.3.1)可改写为$\left|\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\right|\leqslant C$，当 t 趋近于 t_0 时，不等式的左面实际上就是 $f(t)$在 t_0 点的一阶导数 $f'(t)$，取 $C\geqslant|f'(t)|$，则式(7.3.1)成立。

如果 $f(t)$在点 t_0 不连续但在 t_0 的邻域有界，或者说它在 t_0 有有限跃度，则其 Lipschitz 指数为 0。当 $\alpha=0$ 时，式(7.3.1)成为$|f(t)-f(t_0)|\leqslant C$，左面最多等于 $f(t)$在 t_0 点的跃度，取 C 等于或大于跃度，则式(7.3.1)成立。

还可以将 Lipschitz 指数推广到为负数的情况：如果 $f(t)$的原函数在 t_0 点的 Lipschitz 指数为 α，则 $f(t)$在该点的 Lipschitz 指数为 $\alpha-1$。例如 $\delta(t-t_0)$的原函数为一单位价跃，它在 t_0 的 Lipschitz 指数为 0，故 $\delta(t-t_0)$在 t_0 点的 Lipschitz 指数为-1。现在可以清楚地看到，Lipschitz 指数确实能在更一般的意义下定量地描述函数的奇异性。

在利用小波分析这种局部奇异性时，小波系数取决于 $f(t)$在 t_0 点的邻域内的特性及小波变换所选取的尺度。

在小波变换中，局部奇异性可定义如下。

定义 7.3.2 设 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，若 $f(t)$对 $\forall t\in\delta t_0$，小波 $\psi(t)$是实函数且连续可微，并

具有 n 阶消失矩(n 为正整数)，有：

$$|WT_f(s,t)| \leqslant Ks^{\alpha} \quad K\text{ 为常数}$$

则称 α 为 t_0 点的奇异性指数(也称 Lipschitz 指数)。

定义 7.3.3　对 $\forall t \in \delta t_0$，有 $|WT_f(s,t)| \leqslant |WT_f(t,t_0)|$，则称 t_0 为小波变换在尺度 s 下的局部极值点。

从以上分析可以看出，随着尺度越来越精细，小波变换模将呈指数衰减，Lipschitz 指数越大，衰减越快。这样，就可以由小波变换模的衰减速度来度量 Lipschitz 指数。

通常情况下，信号奇异值分两种情况：一种是信号在某一时刻，其幅值发生突变，引起信号的非连续，幅值突变处称为第一种类型的间断点；另一种是信号外观上很光滑，幅值没有突变，但是信号的一阶导数有突变发生，一阶导数不连续，称为第二种类型的间断点。

7.3.2　检测第一种类型的间断点

本节给出一个例子，介绍利用小波分析来检测第一类间断点情况下，信号幅值变化的准确时间，即间断点的准确位置。本例中，信号的不连续是由于低频特征的正弦信号在后半部分中，突然有中高频特征的正弦信号加入引起的。分析的目的是将中高频特征的正弦信号加入的时间点检测出来。

[**例 7-5**]　对一个给定的含有突变点的信号(信号的文件名为 freqbrk.mat)，利用小波分析对信号发生突变点的时刻进行检测。

解：该问题的处理可按如下程序进行。

```
load freqbrk; % 装入要分析的信号
s = freqbrk;
ls = length(s)
[c,l] = wavedec(s,6,'db5'); % 用 db5 小波分解信号到第 6 层
subplot(8,1,1);
plot(s);title('用 db5 小波分解六层: s = a6 + d6 + d5 + d4 + d3 + d2 + d1');
ylabel('s');
% 对分解结构[c,l]的第 6 层低频部分进行重构
a6 = wrcoef('a',c,l,'db5',6);
subplot(8,1,2);plot(a6);
Ylabel('a6');
% 对分解结构[c,l]中的各层高频部分进行重构
for i = 1 : 6
decmp = wrcoef('d',c,l,'db5',7 - i);
subplot(8,1,i + 2);
plot(decmp);
ylabel(['d',num2str(7 - i)]);
end
```

输出结果(如图 7.12 所示)。

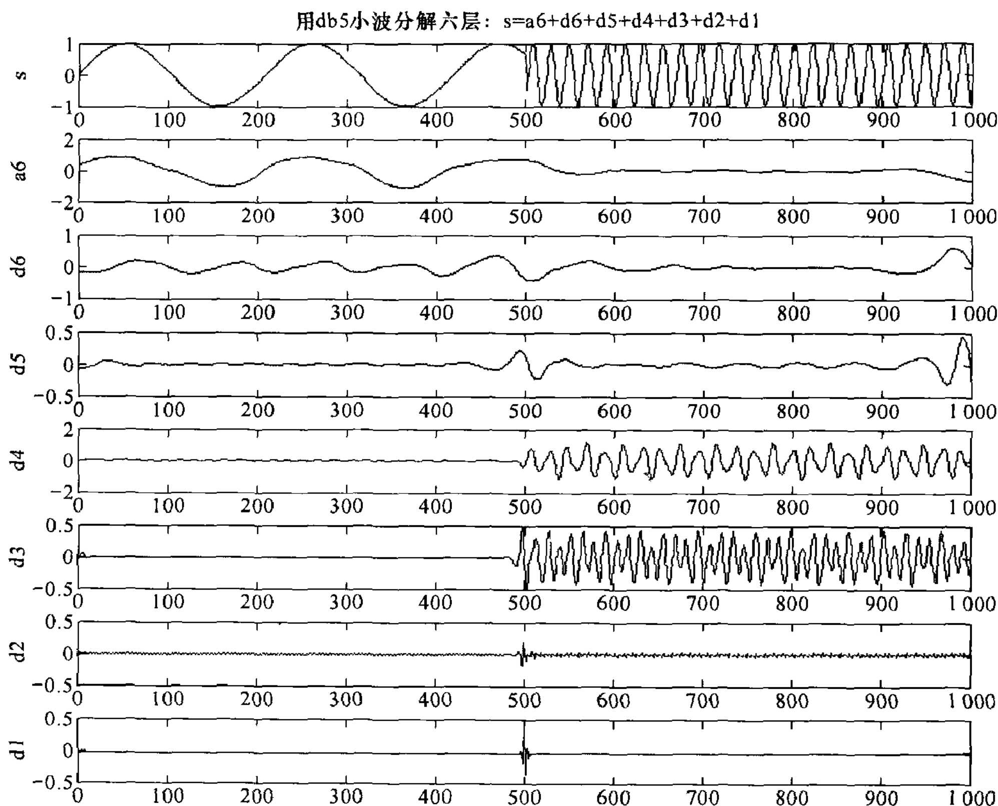


图 7.12　利用小波分析检测信号突变点

可以看到，在该信号的小波分解中，第一层（D1）和第二层（D2）的高频部分将信号的不连续点显示得相当明显，因为信号的断裂部分包含的是高频部分。这里需要说明的是，如果我们只想辨别出信号的不连续点，用 db1 小波比 db5 小波效果更好。由上图可以看出，信号不连续点的时域定位非常精确，该点在时域中（$t\approx500$）一个非常小的范围内。这种情况一般是在小波分解的第一层和第二层高频中进行判断。

这个例子很好地说明了小波分析比传统的傅里叶分析有更大的优越性。如果这种信号用傅里叶分析方法进行，我们在频域中是无法检测出信号在时域中的突变点的，而在小波分析中，这种突变点的特征就表现得相当明显。

在信号处理中，信号中含有噪声是一种相当普遍的情况，而噪声的存在增加了辨别不连续点的复杂性。一般来说，如果信号用小波分解的第一层能够估计出噪声的大体位置，则信号的断裂点（频率变化点）就能够在小波分解的更深的层次上显示出来。

下面分别用傅里叶变换和 db1 小波变换实现对信号的频域分析，从比较中可以看出傅里叶变换在处理时域上有突变的信号时的不足，以及用不同的小波变换对信号分析的差别。

程序清单：

```
%信号的傅里叶变换
load freqbrk;                    %装入要分析的信号
s = freqbrk;
ls = length(s)
```

```
subplot(6,1,1);
plot(s);title('原始信号的时域图');
%对信号S进行FFT变换
fs = fft(s,1024);              %在S信号中取1024个点,倘若S中不够长,后面补零
fs = abs(fs);                  %将FFT后的复数用ABS求模的大小,返回的值是复数的模
subplot(6,1,2);plot(fs);
Ylabel('FFT');grid;
%信号用db1小波分解到第三层后的频域特性
[c,l] = wavedec(s,3,'db1');%用db1小波分解信号到第三层
%对分解结构[c,l]的第三层低频部分进行重构
a3 = wrcoef('a',c,l,'db1',3);
subplot(6,1,3);plot(a3);ylabel('a3');
%对分解结构[c,l]中的各层高频部分进行重构
for i = 1:3
decmp = wrcoef('d',c,l,'db3',4 - i);
subplot(6,1,i + 3);
plot(decmp);
ylabel(['d',int2str(4 - i)]);
end
```

输出结果如图7.13所示。

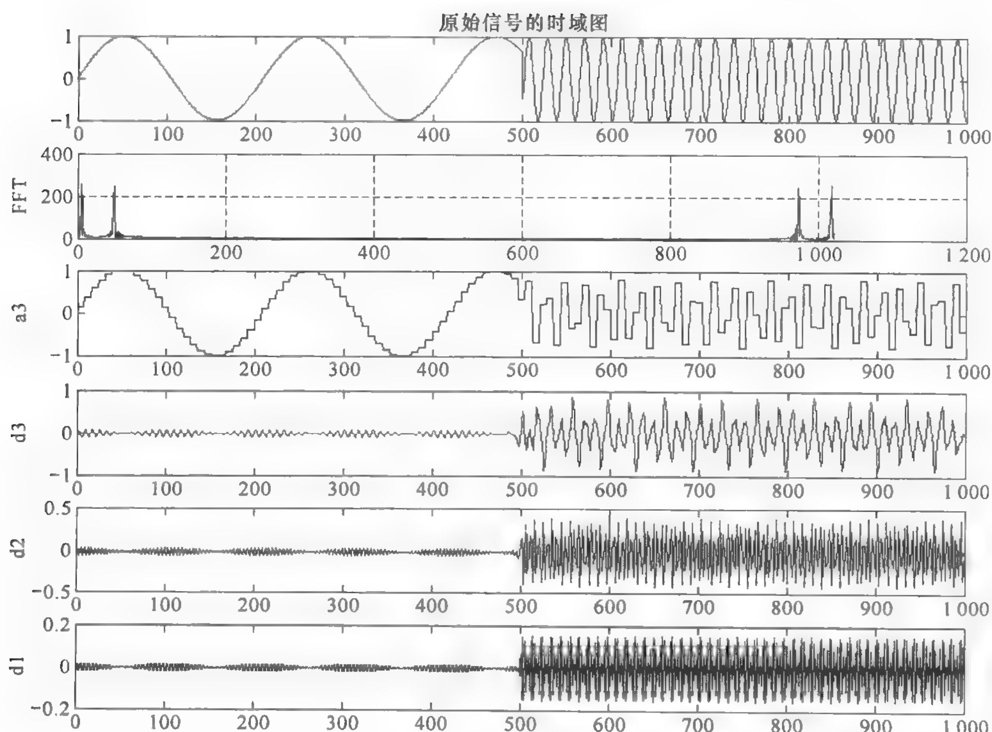


图7.13 分别用傅里叶变换和db1小波变换实现对信号的频域分析

在图中可以看出，由于傅里叶变换将信号变换成纯频域中的信号，使它不具有时间分辨的能力，故对信号在时域中的突变点根本无法检测出来。而 db1 小波分解后的信号，则可以很明显地辨别出该断裂点。

[**例 7-6**]　某一正在工作的系统，其正常工作时，输出点的信号应为一蠕变信号，当系统出现故障时，输出信号将会出现一突变信号（主要表现在幅值和频率的突变）。现给出该系统从正常到出现故障的一采样序列，请利用小波分析方法分析故障出现的时间点。

解：该问题是一个检测突变点（或不连续点）的问题，利用小波分析可以精确地检测出信号突变的时间点。一般方法是：对信号进行多尺度分析，在信号出现突变时，其小波变换后的系数具有模量极大值，因而可以通过对模量极大值点的检测来确定故障发生的时间点。

程序清单：

```
t = 0 : pi/125:4 * pi
s1 = sin(t);                    % 设置一正常信号
s2 = sin(10 * t);               % 设置一故障信号,表现在频率的突变
s3 = sin(t);                    % 设置一正常信号
s = [s1,s2,s3];                 % 整个信号
subplot(421);plot(s);
title('原始信号');
ylabel('s');
[c,l] = wavedec(s,6,'db3');% 采用 db3 小波并对信号进行六层分解
apcmp = wrcoef('a',c,l,'db3',6);
subplot(422);plot(apcmp);
ylabel('ca6');
for i = 1 : 6
decm P = wrcoef('d',c,l,'db3',7 - i);
subplot(4,2,i + 2);
plot(decmp);
ylabel(['d',num2str(7 - i)]);
end
```

输出结果如图 7.14 所示。

从上图的小波分解的层系数可以明显看出，在 $t=500$ 时，系统工作出现了异常情况，在 $t=1\,000$ 时，系统工作又恢复了正常。

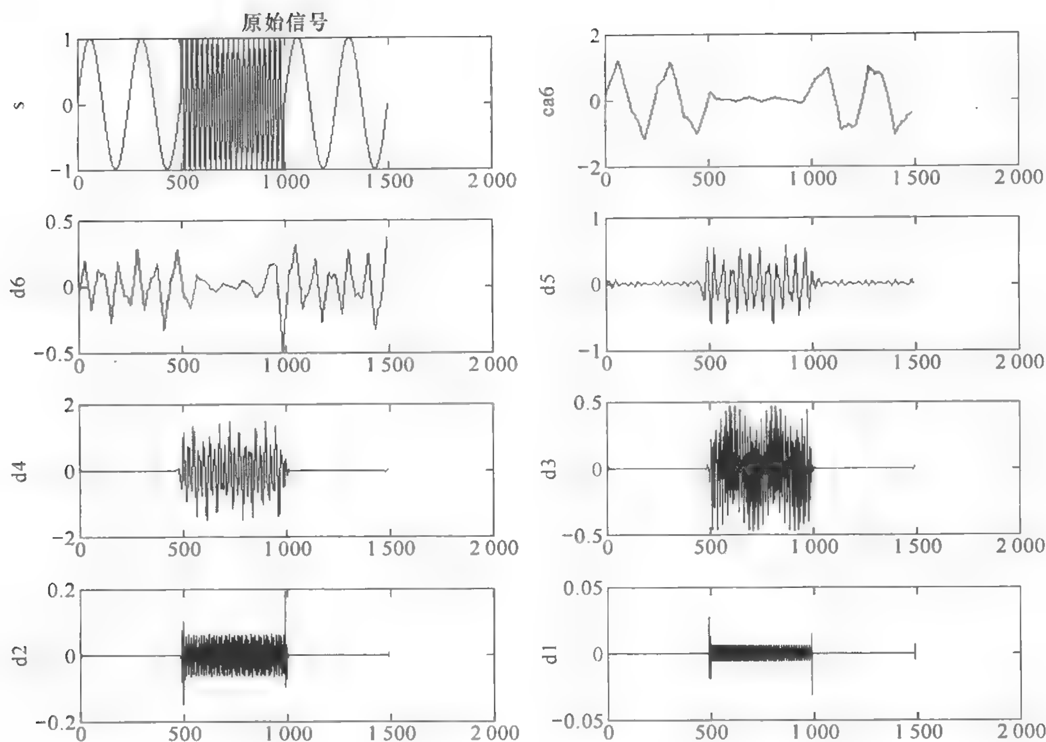


图 7.14 利用小波分析方法分析故障出现的时间点

7.3.3 检测第二种类型的间断点

[**例 7-7**] 对某一给定的信号,它是由两个独立的满足指数方程的信号连接起来的,请利用小波分析来检测出第二类间断点的准确位置。

解:这个例子中的信号,在外观上是很光滑的曲线,但是该信号具有一阶微分且突变。分析的目的是将第二类间断点寻找出来。

程序清单:

```
t = 1:0.01:2;
s1 = exp(t);
s2 = exp(4 * t);
s = [s1,s2];                    % 设置由不同指数函数组成的信号
subplot(6,1,1);plot(s);title('原始信号');
ds = diff(s);                   % 计算信号的一阶微分
% 显示信号的一阶微分结果
subplot(6,1,2);plot(ds);
ylabel('s 微分');
[c,l] = wavedec(s,2,'db1');% 采用 db1 小波分解信号到第 2 层
% 对分解结构[c,l]的第 2 层低频部分进行重构
```

```
a2 = wrcoef('a',c,l,'db1',2);
%显示重构结果
subplot(6,1,3);plot(a2);
ylabel('a2');
%对分解结构[c,l]中的各层高频部分进行重构并显示结果
d2 = wrcoef('d',c,l,'db1',2);
subplot(614);plot(d2);
ylabel('d2');
d1 = wrcoef('d',c,l,'db1',1);
subplot(615);plot(d1);
ylabel('d1');
```

输出结果如图 7.15 所示。

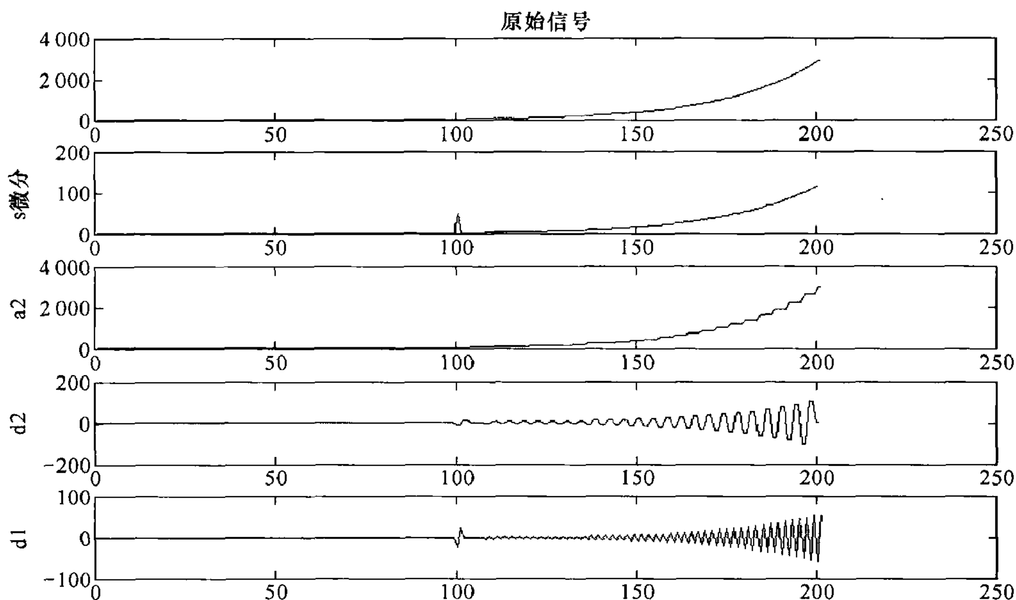


图 7.15　利用小波分析来检测出第二类间断点

可以看到,该信号的一阶微分曲线在 $t=100$ 点处,有明显的不连续。将该信号进行小波分解后,第 1 层的高频部分 d1 将信号的不连续点显示得相当明显,由图 7.15 可以看出,利用小波分析进行信号的不连续点的定位非常精确。像这种间断点的定位,一般来说,是在小波分解的第 1 层和第 2 层高频部分中进行判断的。

需要注意的是,在选择小波的过程中,正则性是一条很重要的规则,在这里我们选择的是 db1 小波,这种小波正则性很好,如果选择 db4 小波,会发现在 $t=100$ 点处,高频部分的值几乎为 0,检测不出信号的不连续点(第二类间断点)。

7.3.4　图像多尺度边缘检测

物体的边缘表现为图像局部特性的不连续性,如灰度值的突变、颜色的突变。边缘常常意味着一个区域的终结和另一个区域的开始。图像边缘信息在图像分析和人的视觉中都是

十分重要的，是图像识别中提取图像特征的一个重要属性。图像边缘有幅度和方向两个特性。通常，沿边缘走向的幅度变化平缓，垂直于边缘走向的幅度变化剧烈。此外，因物体大小不一，它们的边缘也有不同的尺度。Canny 边缘检测等价于在二维二进小波变换下检测模极大值，边缘点的 Lipschitz 正则性取决于尺度细化过程中模极大值的衰减速度。

1. 二维二进小波变换

在二维情况下，Canny 边缘检测算法通过计算图像信号 $f(x,y)$ 的梯度矢量

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{7.3.2}$$

的模的局部极大值来寻找图像边缘的位置。梯度矢量的方向指出了图像灰度值变化最快的方向。

为了计算图像信号的两个偏导数，需要两个有方向性的二维小波，它们分别是二维平滑函数 $\theta(x,y)$ 的偏导数

$$\psi^x(x,y)=-\frac{\partial\theta(x,y)}{\partial x},\psi^y(x,y)=-\frac{\partial\theta(x,y)}{\partial y} \tag{7.3.3}$$

在 x-y 平面的积分为 1，且很快地收敛到零。

令

$$\psi_j^x(x,y)=2^{-j}\psi^x(2^{-j}x,2^{-j}y),\psi_j^y(x,y)=2^{-j}\psi^y(2^{-j}x,2^{-j}y) \tag{7.3.4}$$

并定义小波变换的两个分量

$$W^xf(2^j,x,y)=(f(u,v),\psi_j^x(u-x,v-y))=f*\bar{\psi}_j^x(x,y)$$

$$W^yf(2^j,x,y)=(f(u,v),\psi_j^y(u-x,v-y))=f*\bar{\psi}_j^y(x,y) \tag{7.3.5}$$

其中，

$$\psi_j^x(x,y)=\psi_j^x(-x,-y),\psi_j^y(x,y)=\psi_j^y(-x,-y) \tag{7.3.6}$$

任意 $f\in L^2(\mathbf{R}^2)$ 的二进小波变换均定义为如下函数族

$$Wf(2^j,x,y)=\{W^xf(2^j,x,y)\ ,W^yf(2^j,x,y)\}_{j\in\mathbf{Z}} \tag{7.3.7}$$

为确保二进小波变换的完备性和稳定性，必须满足如下充分必要条件：存在两个正数 A 和 B，对 $\forall\,(\omega_x,\omega_y)\in\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$ 使

$$A\leqslant\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}^x(2^j\omega_x,2^j\omega_y)|^2+|\hat{\psi}^y(2^j\omega_x,2^j\omega_y)|^2\leqslant B \tag{7.3.8}$$

其中，$\hat{\psi}^x$ 和 $\hat{\psi}^y$ 分别表示 ψ^x 和 ψ^y 的二维傅里叶变换。满足式(7.3.8)的 $\{\psi^x\ ,\psi^y\}$ 称为二进小波，对二进小波存在重构小波 $\{\tilde{\psi}^x\ ,\tilde{\psi}^y\}$，它们的傅里叶变换满足

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{2j}[\hat{\tilde{\psi}}^x(2^j\omega_x,2^j\omega_y)\hat{\psi}^{x*}(2^j\omega_x,2^j\omega_y)+\hat{\tilde{\psi}}^y(2^j\omega_x,2^j\omega_y)\hat{\psi}^{y*}(2^j\omega_x,2^j\omega_y)]=1 \tag{7.3.9}$$

因而

$$f(x,y)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{-2j}[W^xf(2^j,x,y)*\tilde{\psi}_j^x(x,y)+W^yf(2^j,x,y)*\tilde{\psi}_j^y(x,y)] \tag{7.3.10}$$

2. 尺度边缘检测

与一维情况类似，由于$\{\psi^x,\psi^y\}$是平滑函数$\theta(x,y)$的1阶偏导数，所以二维二进小波变换的两个分量等价于信号$f(x,y)$被平滑后的梯度矢量的两个分量，即

$$\begin{pmatrix} W^x f(2^j,x,y) \\ W^y f(2^j,x,y) \end{pmatrix} = 2^j \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(f * \bar{\theta}_j)(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(f * \bar{\theta}_j)(x,y) \end{pmatrix} = 2^j \nabla (f * \bar{\theta}_j)(x,y) \tag{7.3.11}$$

梯度矢量$\nabla(f * \bar{\theta}_j)(x,y)$的模正比于

$$Mf(2^j,x,y) = \sqrt{|W^x f(2^j,x,y)|^2 + |W^y f(2^j,x,y)|^2} \tag{7.3.12}$$

而梯度矢量与水平方向的夹角为

$$Af(2^j,x,y) = \begin{cases} \alpha(x,y), & W^x f(2^j,x,y) \geqslant 0 \\ \pi - \alpha(x,y), & W^x f(2^j,x,y) \geqslant 0 \end{cases} \tag{7.3.13}$$

其中，

$$\alpha(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{W^y f(2^j,x,y)}{W^x f(2^j,x,y)}\right) \tag{7.4.14}$$

用二进小波变换实现多尺度边缘检测就是寻找$Mf(2^j,x,y)$的局部极大值，$Af(2^j,x,y)$指明了边缘的方向。除确定边缘的位置和方向外，还可以用小波变换的衰减速度判断边缘的奇异性。对Lipschitz指数$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，如存在常数$A>0$，对所有的$(x,y)\in \mathbf{R}^2$，使得

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leqslant A(|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2)^{\alpha/2} \tag{7.3.15}$$

则称函数f在(x_0,y_0)点Lipschitz α。如对区域(x_0,y_0)内的所有点，都存在$A>0$，使式(7.3.15)成立，则称函数f在Ω内一致Lipschitz α。与一维情况类似，可以证明：当且仅当存在$A>0$，对所有尺度2^j及区域Ω内的所有点，使得

$$|Mf(2^j,x,y)| \leqslant A2^{j(\alpha+1)} \tag{7.3.16}$$

则f在Ω内一致Lipschitzα。

［**例7-8**］ 利用canny算子检测图像边缘。

```
I = imread('d:\lena.bmp');
BW1 = edge(I,'canny',0.1);      % 利用 canny 算子检测图像边缘
figure,imshow(BW1);
```

运行结果如图7.16所示。



(a)Lena图像　　(b)Lena的边缘

图7.16 利用canny算子检测图像边缘

7.4　小波在数字水印技术中的应用

7.4.1　数字水印技术的概念

数字水印技术(Digital Watermarking)是信息安全领域研究的重要方向,弥补了传统加密技术的不足,为数字媒体的版权保护和合法使用提供了一种新的解决思路。数字水印技术是指利用媒体中存在的视觉/听觉冗余,利用信号编码、密码学、调制、数据融合和数字信号处理等数据处理方法,将数字水印嵌入到数字媒体中,成为原始媒体不可分离的一部分,并且在需要时可以检测或提取出所嵌入数字水印的一种数据处理技术。数字水印技术为数字媒体在版权保护、认证、防复制、防篡改、保障数据安全和完整性等方面提供了有效的技术手段。

数字水印主要有以下特性:

(1) 知觉不可见性。也称知觉透明性。一方面是指嵌入的水印在知觉(视觉/听觉)上是透明的或不可感知的,即它的存在不会使嵌有水印的数字媒体质量在知觉(视觉/听觉)上发生变化;另一方面是指不能用统计的方法从嵌有水印的数字媒体中恢复出水印。

(2) 鲁棒性。也称水印稳健性,是指嵌入到数字媒体中的水印在水印媒体经过有意或无意处理后仍能保持完整或能被鉴别的特性。对图像而言,可能的处理包括图像有损压缩、滤波、剪切、A/D 变换和 D/A 变换、重采样、加噪声、几何变换等。鲁棒性要求任何消除或破坏水印的操作也同时会使加入水印的媒体失去使用价值。

(3) 安全性。一方面是指水印嵌入算法的安全性,即任何非授权用户既不能读取水印,也不能检测到媒体中的水印的存在;另一方面是指水印信息安全性,即水印信息必须是秘密的,并且水印信息应该是在统计上不可破译的。

(4) 不可逆性。是指水印方案应该是不可逆的,即攻击者不能根据带有水印的媒体伪造一个原始媒体和原始水印,以避免出现被保护的数字产品所有权归属无法区分的现象,即避免被保护的数字产品发生所有权归属纠纷。

(5) 可验证性。也称可证明性,是指嵌入的水印可以为受到版权保护的数字产品的归属提供完全可靠的证据,即通过水印算法嵌入到被保护数据中的版权信息应该能在需要的时候被提取出来或被检测到,并且能被有效地验证。

(6) 密钥唯一性。是指水印的产生应该依赖于产生水印的密钥,不同的密钥能产生不同的、统计上独立的水印信号。

(7) 可理解性。也称水印可读性,是指水印应包含一定的信息量以满足不同应用的要求。

(8) 水印容量。是指数字水印所包含的数据量大小,通常以比特(bit)为单位进行衡量。

7.4.2　数字水印的基本原理

大多数的数字水印算法都很类似,主要包括数字水印的嵌入和提取两部分。

数字水印的嵌入过程就是将数字水印信号叠加或自适应地叠加到图像的灰度(亮度)或

者色彩上，其过程可以发生在空间域或者变换域上，如图 7.17 所示。

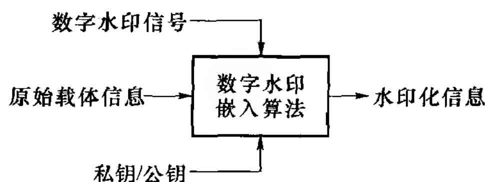


图 7.17　数字水印的嵌入过程

系统的输入是数字水印、被保护的原始载体数据和一个可选的公钥或私钥。水印信号可由多种模型构成，例如随机数字序列、数字标识、文本以及图像等都可以作为数字水印。通常要将数字水印算法与加密/解密算法相结合。密钥可以用来加强安全性，加密过程中可以使用一个密钥，也可以是几个密钥的组合。这样，即使非授权用户可以提取出水印，但是在没有密钥的情况下，也无法读出水印信息，从而可以为原始载体提供双层的保护。当水印与私钥或公钥结合时，嵌入水印的技术通常分别称为秘密水印技术和公开水印技术。

图 7.18 描述了一般的数字水印提取和检测过程。

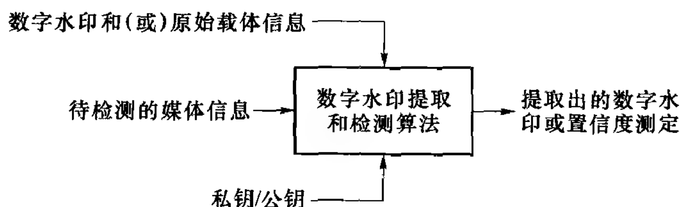


图 7.18　数字水印的提取和检测过程

该系统的输入是待检测媒体信息、私钥或公钥，以及原始水印和(或)原始载体信息。输出的是提取出的水印信号，或某种可信度的值，它表明了所考察的待检测媒体信息中存在给定水印的可能性。通常利用信号的相关性实现水印的提取，如相关接收器或匹配过滤器等。在水印验证过程中，通过计算检测到的水印信号与已知水印信号的相似度，可以判断数据中是否含有已知的水印信号。

7.4.3　数字水印的分类

从不同的角度出发，对数字水印有不同的分类方法，常见的有如下几种：

(1) 按水印所附载的媒体分类，可以将数字水印划分为图像水印、音频水印、视频水印、文本水印以及用于三维网格模型的网格水印等。

(2) 按水印的特性分类，可以将数字水印分为鲁棒数字水印和脆弱数字水印。鲁棒数字水印主要用于解决在数字作品中标识著作权信息问题，例如作者名称、作者序号等，它要求嵌入的水印能够抵抗各种有意或无意的攻击；脆弱水印主要用于完整性保护，要求对信号的改动敏感，人们根据脆弱水印的状态可以判断数据是否被篡改过。

(3) 按水印的主观形式分类，可将数字水印分为可觉察数字水印和不可觉察数字水印。可觉察数字水印嵌入到媒体后在媒体中留下明显的印记，主要用于标识版权，防止非法使用，虽然降低了资料的商业价值，但不妨碍使用者的使用。不可觉察性数字水印嵌入到数字作品中，人的感观不能明显地觉察，不影响作品的质量。

(4) 按水印的检测过程分类,可以将数字水印划分为有源提取水印和无源提取水印。有源提取水印在检测过程中需要原始数据,而无源提取水印只需要密钥,不需要原始数据。

(5) 按数字水印的嵌入位置分类,可以将水印划分为时(空)域数字水印、频域数字水印和时/频混合域数字水印3种。

(6) 按数字水印的内容分类,可以将数字水印划分为有意义水印和无意义水印。有意义水印是指水印本身也是某个数字图像(如商标图像)或数字音频片段的编码;无意义水印则只对应于一个序列号。有意义的水印的优势在于,当受保护的媒体信息受到攻击或其他原因致使解码后的水印不完整时,人们仍然可以通过视觉观察确认是否含有水印。但对于无意义水印来说,如果解码后的水印序列有若干码元错误,则只能通过统计决策的方法来确定信号中是否含有水印。

(7) 按水印加密方法分类。在密码学中,根据密钥的不同加密方法可分为对称密码加密和非对称密码加密(公钥密码体系)两种。类似地,数字水印算法也可根据所采用的密钥的不同分为私钥数字水印和公钥数字水印。私钥数字水印方案在加载数字水印和检测数字水印过程中采用同一个密钥(私钥)。因此,需要在发送和接收双方之间有一个安全的通道以确保密钥的安全传送。而公钥数字水印则在数字水印的加载和检测过程中采用不同的密钥,利用任何人都知道的公开密钥加载数字水印,加载过数字水印的信号被所有者用一个只有他本人自己知道的密钥进行检测。也就是说任何人都可以进行数字水印的嵌入和加载,但只有所有者可以提取或检测数字水印。

(8) 按用途分类,可以将水印划分为票据防伪水印、版权保护水印、篡改提示水印和隐蔽标识水印等。

7.4.4 数字水印技术的主要应用

数字水印技术的研究成果主要可应用于以下几个方面:

(1) 媒体所有权的版权认定和保护

目前,版权保护是数字水印最主要的应用。由于数字作品的复制、修改非常容易,而且可以做到与原作品完全一致,所以如何对数字作品(如电脑美术、扫描图像、数字音乐、视频、三维动画)的版权进行保护一直是一个难点问题。数字水印通过在被保护的作品中嵌入数据的来源信息以及有代表性的版权信息,从而可以有效地防止其他团体宣称对该作品拥有版权。媒体创作者在媒体传播前嵌入水印,用于识别合法用户信息,对媒体的传播进行跟踪。例如,如果在数字照相机中实现水印技术,就可以使所拍摄的照片带上摄影师的信息。

(2) 防止非法复制

在多媒体发行体系中,建立禁止未授权的媒体复制的复制保护机制非常重要。在这样的系统中,可以用数字水印来说明数据的复制情况。例如,在媒体的录/放设备的设计中应用图像数字水印技术,当录/放设备工作时,通过检测媒体中是否带有水印,以决定该媒体应不应该被录/放,从而拒绝非法复制媒体的流行和使用。同样的原理可应用于广播、电视、计算机网络在线多媒体服务中的听、看、访问权限的控制。

(3) 盗版跟踪

与软件产品的序列号类似,数字水印可用于监控和跟踪流通数据的非法复制。主要用来识别数据的单个发行复制。在发行的每个复制中嵌入不同的水印,通常称之为“数字指

纹"。该应用要求水印算法易于提取,复杂度低。例如对于 WWW 应用,有专门的 Web 搜索者寻找已嵌入数字水印的盗版图像。

(4) 基于内容的真伪鉴别

随着高质量图像输入输出设备的发展,特别是高精度的彩色打印机和复印机的出现,使得货币、支票以及其他票据的伪造变得更加容易。另外,在从传统商务向电子商务转换过程中,会出现大量过度性的电子文件,如各种纸质票据的扫描图像等。数字水印技术可以用于鉴别支票、合同等重要文档的来源的真实性、内容的真实可靠性等。在鉴定应用中,使用数字水印的目的是对数据的修改进行检测,该技术可利用所谓的"脆弱性水印"来实现。数字水印还可以为各种票据提供不可见的认证标志,从而大大增加了伪造的难度。

(5) 隐蔽通信及其对抗

网络情报战是信息战的重要组成部分,其核心内容是利用公用网络进行保密数据传送。迄今为止,学术界在这方面的研究思路一直未能突破"文件加密"的思维模式。然而,经过加密的文件往往是混乱无序的,容易引起攻击者的注意。数字水印所依赖的信息隐藏技术不仅提供了非密码的安全途径,更引发了信息战尤其是网络情报战的革命,产生了一系列新颖的作战方式,使得利用公用网络进行保密通信有了新的思路,利用数字化声像信号相对于人的视觉、听觉冗余,可以进行各种时(空)域和变换域的信息隐藏,从而实现隐蔽通信。

(6) 多语言电影系统和电影分级

利用图像数字水印技术,可以把电影的多种语言配音和字幕嵌入到视频图像中携带,在保证图像视觉质量不受影响的情况下节省了声音的传输信道。与此类似,把电影分级信息嵌入到图像中,可以实现画面放映的控制,从而实现电影的分级播放。

(7) 数字媒体附加描述和参考信息的携带

可以把感兴趣的图像特征(或区域)的位置和识别信息直接嵌入到图像中,实现特征的定位和识别。

7.4.5 空间域和频率域水印研究现状

数字水印算法的实现在空间域或频率域(变换域)进行。现有的空间域和频率域方法主要有以下几种。

1. 空间域的方法

空间域方法是指通过直接改变像素的亮度或彩色光带,或在这两者之上叠加一个调制信号的方式嵌入数字水印信号。常见的空间域方法可以分成以下几大类:

(1) 文档结构微调法

该方法用于在 PS 或 PDF 文档中隐藏数字水印。通过在不易觉察的范围内,细微改变文档的行间距、字间距和字符特性等方式实现水印的嵌入。这种水印的安全性主要靠隐蔽性来保证。

(2) 最低有效位算法(LSB)

最低有效位算法是 L. F. Turner 和 R. G. Van Schyndel 等人提出的第一个数字水印算法。该方法使用特定的密钥,由 m—序列发生器产生随机信号,然后将该信号按一定的规则排列成二维形式作为水印信号,插入到原始图像或音频信号的最低几位,从而实现数字水印的嵌入。Fleet 把 LSB 方法应用于彩色图像,图像的 LSB 平面先被设置为 0,然后根据是

否嵌入了水印而改变为 1 或不变。改变 LSB 的依据是:不重要数据的调整对原始图像的视觉效果影响较小。算法的优点是信息的隐蔽性好,在视觉和听觉上很难被用户觉察。现在用于网上的一些简单的信息伪装软件,大多采用 LSB 算法和调色板相关技术,将信息隐藏在 24 bit 图像或 256 色图像之中。然而最低有效位的数据最有可能在常见的信号处理过程(如数据压缩和低通滤波)中丢掉,因此隐藏的信息比较脆弱,无法经受某些有损的或无损的信号压缩处理。

(3) Patchwork 方法

Patchwork 方法是麻省理工学院媒体实验室 Walter Bander 等人提出的一种数字水印算法,主要用于打印票据的防伪。该方法通过任意选择 N 对像素点,在增加一点的亮度值的同时相应降低另一点的亮度值,将 1 bit 的信息隐藏于数字媒体中。该算法具有较强的不易觉察性,对有损压缩编码、剪切和灰度校正等恶意攻击有较强的抵抗性。缺点是隐藏的数据量少,对仿射变换敏感,不能抵御多复制平均攻击。

(4) 纹理块映射编码(Texture Block Coding)方法

该方法将水印信号隐藏于数字图像的随机纹理区域中,利用纹理间的相似性保证水印信息的知觉透明性。该算法对滤波、压缩和扭转等操作具有抵抗能力,但仅适用于有大量纹理区域的图像,且尚不能自动完成,需手工干预。

2. 频率域数字水印方法

是指将水印嵌入到多媒体数据的频率域上。常见的频率域方法有:

(1) 基于 DCT/DFT 频率域数字水印

基于 DCT(Discrete Cosine Transform)/ DFT (Discrete Fourier Transform) 水印算法具有较好的鲁棒性,可以有效抵御有损压缩和一些利用信号失真破坏水印的攻击方法。这是目前针对图像研究的最多的一类数字水印方法,其主要思路是:在图像的 DCT 变换域上,选择人眼感知最重要的频谱成分叠加水印信息。该类方法常利用人眼视觉系统的视觉掩蔽特性来折衷水印的不可知觉性和鲁棒性要求,达到应用效果。

(2) 基于小波和分形的数字水印算法

类似于 DCT/DFT 算法,基于小波变换(Discrete Wavelet Transform,DWT)的水印算法主要也是针对小波系数进行的。除了对一般的几何畸变和信号处理具有鲁棒性外,它还可以抵御 JPEG 压缩,同时还能有效抵御基于小波变换的图像压缩处理。

(3) 基于直接序列扩频的数字水印算法

扩频数字水印方法与扩频通信类似,将利用一般算法生成的数字水印信号再通过扩频调制后,叠加到原始数据上。从频域上看,水印信息分布于整个频谱上,无法通过一般的滤波手段恢复,这样可以更好地抵抗消除攻击。

从综合性能分析,空间域数字水印方法应用领域较窄,对一些攻击的抵抗性较差。频率域水印算法的主要优点是:①在频率域中嵌入的水印信号,其能量可以分布到空间域的所有像素上,有利于保证不可见性。②在频率域,HVS 的某些特性(如视觉掩蔽特性、频率掩蔽特性)可以更方便地结合到水印编码过程中,有利于鲁棒性的提高。③变换域的方法可与国际数据压缩标准兼容,对有损压缩和其他的信号处理具有较强的免疫力,因此更具优越性,目前占据了主要地位。

7.4.6 基于 DCT 域的图像数字水印技术

图像二维 DCT 变换有许多优点。图像信号经过变换后，变换系数几乎不相关，经过反变换重构图像，信道误差和量化误差将像随机噪声一样分散到块中的各个像素中，不会造成误差积累，并且变换能将数据块中的能量压缩到为数不多的几个低频变换系数中(即 DCT 矩阵的左上角)。

离散余弦变换 DCT 域的方法，计算量小，且与国际数据压缩标准(JPEG、MPEG、H261/263)兼容，便于在压缩域中实现，是当前该领域研究的一个重要方向。

考虑到数字水印的视觉不可见性，最初的基于 DCT 域的数字水印算法将数字水印嵌入到图像频谱中能量较低的部分，但这样往往不能抵御有损压缩如 JPEG。如果首先考虑到数字水印的鲁棒性，则应该将水印嵌入到原始图像的频谱能量较高的部分，但此时若不进行有效的掩蔽工作，则可能使得嵌入数字水印后的图像与原始图像在视觉上产生较明显的差别。在 DCT 域，由于感觉上最重要的分量就是图像信号的主要成分，携带了较多的信号能量，在图像有一定失真的情况下，仍能保持主要成分。因此，一般情况下，将水印嵌入到图像中对于人类的视觉最重要的地方(主要对应于图像 DCT 频域的低频系数)。在首先保证数字水印鲁棒性的前提下，利用图像自身的特点和 HVS 的特性，实现数字水印强度自适应于原始图像，从而保证图像的不可见性。

基于 DCT 的数字水印算法的一般方法是：首先将数字图像分成 8×8 的互不重叠的像素块，在经过 DCT 变换后，得到由 DCT 系数组成的频率块，然后按照一定的准则选取一些频率块，通过对选定的频率块的 DCT 系数进行微小的改变以满足特定的关系，以此来嵌入数字水印信息。在数字水印提取的过程中，通过选取与嵌入时相同的 DCT 系数，并根据系数之间的关系实现水印的提取。有些方法利用了人眼视觉系统的视觉掩蔽特性，折衷了水印的不可知觉性和鲁棒性要求。现有的文献中基于 DCT 的数字水印技术的算法很多，比较有代表性的有以下几种。

Koch 等人较早研究了 DCT 域图像数字水印方法[31]。之后，在 Bors 和 Pitas 提出的方法中[32]，首先将图像分成 8×8 的块，用高斯网络分析器在原图像中选择一个特定的块，然后利用一个线性 DCT 约束或环形 DCT 检测域对中频段 DCT 系数进行变换，以嵌入数字水印信息。该算法中的数字水印可以看作由两部分组成：用来寻找块位置的参数和对 DCT 系数施加约束的参数。在水印的恢复过程中，要对所有的块验证其 DCT 系数约束和位置约束。

通过对 DCT 块进行频率掩蔽，Swanson 等人也提出了一种 DCT 域的水印技术[33]。输入图像被分为若干方块，对这些方块进行计算，由于掩蔽栅格可提高掩蔽频率附近的信号栅格的可见阈值，对每一个 DCT 块计算它的频率掩蔽。通过对最大长度的伪随机信号进行 DCT 变换，对可见的掩蔽进行放缩和处理，然后将这一水印加入到相应的 DCT 块中，并通过空间掩蔽来验证水印是否是不可见的。

在给定敏感指数的局部感知分类器的基础上，Tao 和 Dickinson 提出了一种自适应的 DCT 域数字水印技术[34]。将数字水印嵌入到交流 DCT 系数中，根据默认的 JPEG 格式压缩表，选择合适的系数，使量化的单位最小，并按一定的算式对选定的系数作修改。

Zhao 和 Koch 描述了一个称作 Syscop 的水印系统[35]，通过生成一个伪随机序列来选

择将要嵌入水印的图像块，对块做 DCT 和量化，通过在每个块的中间频段的 8 个可能位置的量化 DCT 系数中的 3 个之间加入特别关系来嵌入一个水印位。

Cox 等人提出了基于图像全局变换的数字水印方法[36]。他们的重要贡献是明确提出了加载在图像的视觉敏感部分的数字水印才能有较强的鲁棒性。他们的数字水印方案是对整个图像进行 DCT，然后将数字水印加载在预先决定的范围内、除去 DC 分量的低频分量上。

还有一些 DCT 算法是在上述算法基础上的改进。有代表性的如 I. Podichuk 和 Werrjun 提出的基于静止图像的数字水印算法[37]，算法由视觉模型模块返回数字水印应该加载的位置，以及该位置处所承受的恰好可觉察差别 JND(Just Noticeable Difference)量值，即加载数字水印的强度上限。算法具有一定的自适应性。Hsu 和 Wu 把图像进行 8×8 DCT 变换，然后将一个二进制序列嵌入 DCT 的中频系数中[38]。

在参考文献[39]中，首先将图像进行分块 DCT 变换，根据每块的平均灰度和块均匀度，将其分成 3 类：平滑块、纹理块和中间块，对应设定门限 T1、T2、T3，以此作为水印嵌入的强度。下面通过一个参数自适应 DCT 域数字图像水印算法的例子[40]，介绍数字水印实现的过程。

算法的框图如图 7.19 所示。

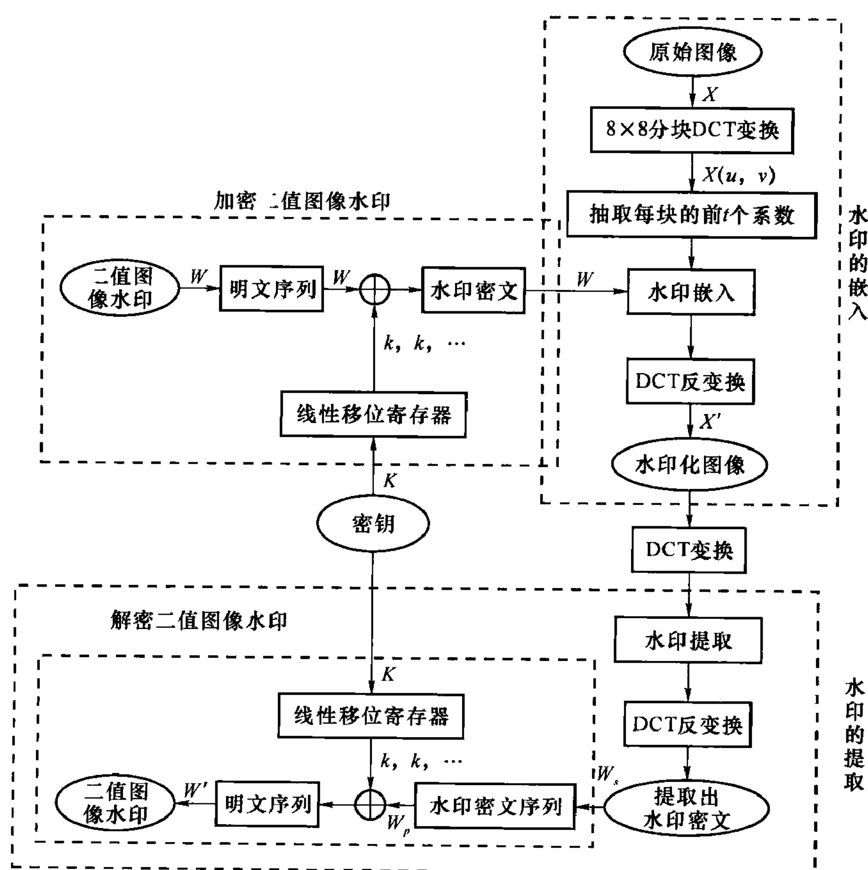


图 7.19　加密二值图像水印算法框图

首先将原始图像分成 8×8 的块，根据 HVS 特性将图像块进行分类。然后，对所有图像块做 DCT 变换。在 DCT 域，根据块分类的结果，不同强度的水印分量被嵌入到图像块的 DCT 系数中。图 7.20 是图像分块示意图，每一个 8×8 块的 DCT 系数排列顺序如表7.1 所示。

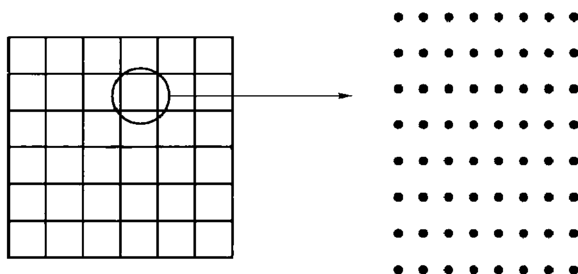


图 7.20　图像分块示意图

表 7.1　8×8 DCT 系数排列顺序

DC	C(0,1)	C(0,2)	C(0,3)	C(0,4)	C(0,5)	C(0,6)	C(0,7)
C(1,0)	C(1,1)	C(1,2)	C(1,3)	C(1,4)	C(1,5)	C(1,6)	C(1,7)
C(2,0)	C(2,1)	C(2,2)	C(2,3)	C(2,4)	C(2,5)	C(2,6)	C(2,7)
C(3,0)	C(3,1)	C(3,2)	C(3,3)	C(3,4)	C(3,5)	C(3,6)	C(3,7)
C(4,0)	C(4,1)	C(4,2)	C(4,3)	C(4,4)	C(4,5)	C(4,6)	C(4,7)
C(5,0)	C(5,1)	C(5,2)	C(5,3)	C(5,4)	C(5,5)	C(5,6)	C(5,7)
C(6,0)	C(6,1)	C(6,2)	C(6,3)	C(6,4)	C(6,5)	C(6,6)	C(6,7)
C(7,0)	C(7,1)	C(7,2)	C(7,3)	C(7,4)	C(7,5)	C(7,6)	C(7,7)

表 7-1 中，DCT 系数按 Zig-Zag 顺序排列，左上角第一个系数是直流系数，接着排列的是低频系数，随着序号的增大频率增高，最右下角对应最高频系数。因此，DCT 变换能够将图像的频谱按能量的大小进行区分，有利于进行相应的频谱操作。

根据人类视觉系统的特性，水印嵌入到原始载体信号的高频系数中，其视觉不可见性较好，但其鲁棒性较差；反之，由于直流和低频分量携带了较多的信号能量，在图像失真的情况下，仍能保留主要成分，因此，将数字水印嵌入到低频系数中其鲁棒性较好，但是其数字水印的不可见性较差。本算法首先从水印的鲁棒性要求出发，将数字水印嵌入到原始载体图像的直流和低频分量中，为了能够同时保证水印的不可见性，算法设计了与水印嵌入位置特征参数相关的视觉掩蔽函数，使水印信号自适应于原始图像。

设水印图像为 $W(i,j)$，$1\leqslant i,j\leqslant M$，在嵌入到原始图像之前，首先利用序列密码将 W 进行加密，使水印方案具有双重安全性。

设原始图像为 $W(i,j)$，$(1\leqslant i,j\leqslant N)$，首先将 X 分割成互不覆盖的 8×8 的子块 $x_b(i,j)$，$1\leqslant i,j\leqslant 8$，$1\leqslant b\leqslant L$，$L$ 为分块数，显然，$L=((N\times N)/(8\times 8))$。然后对每个 x_b 执行 DCT 变换，得到 $x_b(u,v)$。设嵌入到每块中的水印序列长度都相同，都为 t，则 $t=(M\times M)/\mathrm{L}$。根据 HVS 的照度掩蔽特性和纹理掩蔽特性，应该将水印信号尽量叠加在图像的平均灰度较高、纹理边缘复杂的区域，而避免将水印信号嵌入到平均灰度低且灰度分布比较均匀的块中。

设背静照度为 I，根据 Weber 定律，在均匀背景下，人眼刚好可以识别的物体照度为 $I+\Delta I$，ΔI 满足：

$$\Delta I=0.02\times I \tag{7.4.1}$$

文献[41]提出了一个比较准确的对比度敏感函数(Contrast Sensitivity Function，CSF)：

$$\Delta I\approx I_0\cdot\max\{1,(I/I_0)a\} \tag{7.4.2}$$

其中 I_0 为当 $I=0$ 时的对比度门限，a 为常数(0.6～0.7)。

根据式(7.4.2)，对图像 $W(i,j)$，中大小为 $n\times n$ 的块 B_k，定义如下的衡量块均匀度的参数 σ^2[6]：

$$\sigma^2=\frac{1}{n^2}\sum_{(i,j)\in B_K}p(e_k)\cdot\frac{|x(i,j)-e_k|}{e_k} \tag{7.4.3}$$

其中 e_k 为 B_k 的灰度均值，加权系数 $p(e_k)$ 作为修正因子，可由下式确定：

$p(e_b)=(1/e_b)a$　　a 为常数，一般取值为(0.6～0.7)

可以采用如下方法将水印嵌入到每个子块的 DCT 系数中：

$$X'_b(u,v)=\begin{cases}x_b(u,v)+a_1\cdot V_b\cdot w_s & \text{其中 } t\cdot b\leqslant s\leqslant t\cdot(b+1) \quad u=v=0\\ x_b(u,v)+a_2\cdot V_b\cdot w_s & \text{其中 } s \text{ 同上} \quad 0<u,v<t\\ x_b(u,v) & \text{否则}\end{cases} \tag{7.4.4}$$

其中 a_1、a_2 是比例因子，a_1 对应于直流分量，根据实验取一个较小的实数，a_2 取 a_1 的百分之一。V_b 可由实验确定，本算法中取 V_b 为 e_b 和 σ^2 的简单线性关系：$V_b=k_1e_b+k_2\sigma^2$，k_1、k_2 为比例系数。

最后对调整后的图像块进行 DCT 反变换，得到水印化图像为

$$X'(i,j)=\underset{b=0}{\overset{L}{Y}}\text{IDCT}\{x'_b(u,v)\} \tag{7.4.5}$$

水印的提取采取有源提取。其过程与水印嵌入过程相反。假设提取出的信号为 W'_s，利用密钥 k 进行解密，得到水印序列 $W'_p=W'_s\oplus kI$，然后将 W'_p 转化成 2-D 的形式，提取出图像水印 W'。

算法的主要特点是引入了视觉掩蔽函数 V_b，由于 V_b 定义为原始图像分块 DCT 的块均值 e_b 和块均匀度 σ^2 的函数，从而起到了将水印嵌入到图像的纹理和边缘的作用。其不可见性和鲁棒性优于直接利用比例因子 a 决定水印嵌入强度的算法。

7.4.7 基于 DWT 域的鲁棒图像数字水印技术

基于 DWT 的图像水印算法主要是针对小波系数进行的，相比之下，DWT 域图像数字水印较 DCT 域图像数字水印更具优越之处：首先，DCT 变换纯粹将空域变换到频率域，没有利用图像的空间-频率特性，而这种空间——频率特性正好与人眼的某些视觉特性相一致。也就是说，它可以较好地匹配 HVS 特性。其次，采用分块的 DCT 变换有时会使重构图像出现马赛克现象，而用小波则不会出现这种现象。另外，DWT 可以采用图像融合技术将水印分散到载体图像的多个尺度中去，使水印的鲁棒性更强。

Kundur 等人描述了一种基于小波变换的图像融合水印技术[42]。此方法在不同的分辨率下，将水印的小波系数加入到原始图像的小波系数中，加入的水印强度由人眼视觉模型来调整。

Xia 等人提出的 DWT 水印算法实现了水印的层次检测，鲁棒性好[43]。这个处理过程使水印检测的计算量减少。基本思想是，利用离散小波变换将接收到的图像和原始图像都分解到某个尺度上去，然后通过从低级到高级的顺序，计算互相关值来比较加入到 HH 尺度中的原始水印与提取出的 HH 尺度上的水印系数的差别来检测水印。

Rakesh Dugad 等人采用一种阈值法将水印藏于静态图像中[44]。该方法设定两个阈值 T_1 和 T_2，其中 T_1 是水印嵌入阈值，决定水印嵌入的位置，T_2 则是水印的提取阈值，用于决定水印提取的位置，且严格要求 $T_1>T_2$。水印嵌入过程是：对原始图像进行 DWT，得到 DWT 变换系数，将水印嵌入到高频子带中，将系数值大于 T_1 的细节系数进行修改。最后进行 IDWT，得到嵌入了水印的图像。

参考文献[44]的算法对图像进行 3 级小波分解，将高斯噪声作为水印嵌入到小波域的第三层子带中。算法设定了两个比例因子，对 LL3 子带取 a_1，其他子带时取为 a_1 的百分之一。

另外，还有一些算法基于分形压缩和编码，类似于基于 DWT 的方法，主要是利用分形中的自相似概念和迭代函数系统(Iterative Function System，IFS)。

下面通过对一种利用混沌序列加密的小波域数字水印的介绍来阐述小波数字水印的原理和实现过程[40]。首先将原始图像进行小波分解，将包含版权信息和密钥的图像作为数字水印，利用混沌序列加密数字水印，然后将其嵌入到原始图像的 DWT 域的中频子带。在嵌入过程中，根据原始图像的特点和 HVS 的特性，确定调节系数的取值，使其能够同时保证鲁棒性和不可见性。

算法主要包括 3 个部分：图像水印的混沌加密、水印的嵌入和水印的提取。算法框图如图 7.21 所示。

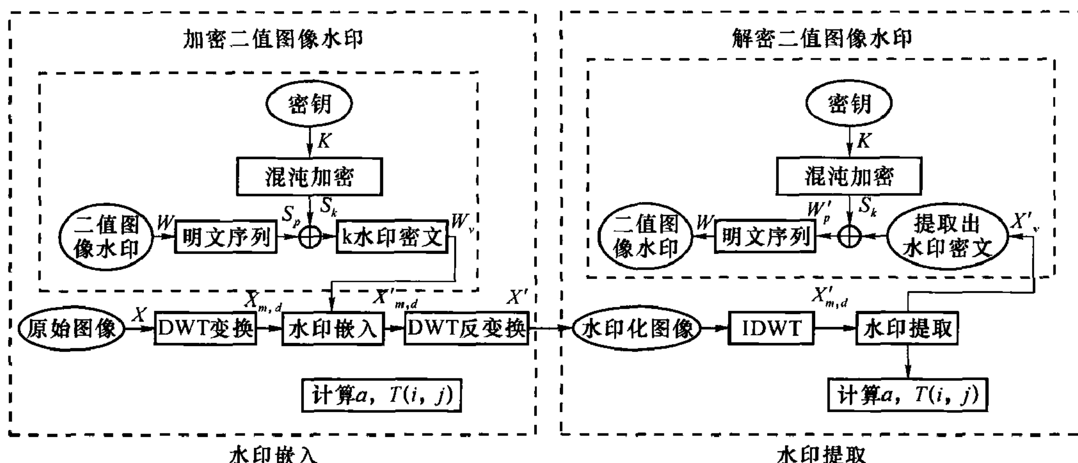


图 7.21 混沌加密图像水印算法框图

1. 二值图像水印的混沌加密

设一动力学系统为 $x_k+1=\mu F(x_k)$，μ 是系统参数，$x_k\in V$，称为状态，$V\subset\mathbf{R}$，$k=0,1,2,\cdots$。F 为非线性映射，F：V→V，将当前状态映射到下一个状态 x_k+1。如果该 F 满足条件：①F 在 V 中对任意初值有灵敏依赖性；②F 在 V 中是拓扑可传递的；③F 的周期点在 V 中稠。则 F：V→V 在 V 中是混沌的。一个混沌系统在混沌区输出序列 x_k，如果将这一随机序列

作为密钥流 $k_i, k_i \in K$ 去调制图像信息流，则可以实现对图像的加密。由于不同的混沌系统可以产生不同的随机序列，即使对于同一系统，如果参数不同其混沌特性也不相同，因此 F 和 μ 可以作为混沌加密系统的密钥。另外，由于混沌系统对初值的敏感性，甚至是在系统和参数完全相同的情况下，不同的初值也可以得到不同的随机序列，因此初值 x_0 也可以作为密钥，再加上编码方式 c，则密钥 K 可以由 $K(F,\mu,x_0,c)$ 组成。由此可以看出，用混沌序列对图像水印进行加密具有随机性好、保密性及复杂度高等特点，从而具有更高的保密安全性。

考虑离散时间动态系统 logistic 映射产生的混沌序列，其定义为[58]

$$x_{k+1}=\mu x_k(1-x_k),x_k\in(0,1) \tag{7.4.6}$$

其中，分支参数 $0\leqslant\mu\leqslant4$。经过变换，logistic 映射在$[-1,1]$上的定义可以表示为

$$x_{k+1}=1-\lambda x_k^2,\ \lambda\in(0,2) \tag{7.4.7}$$

随着 λ 的逐渐增大，迭代会出现多次突变，实验证明，当 $\lambda=1.401\,15$ 时，系统进入混沌状态，产生具有 0 均值、δ 自相关性及互相关为 0 的混沌序列，该序列具有白噪声的统计特性。本书取 $\lambda=2$，初始值 $x_0=0.3$，按式(7.4.7)进行迭代，得到序列 x_k，然后将其进行量化得到 0～1 序列 S_k[59,60]。

设二值图像水印为 $W(i,j)$，$1\leqslant i,j\leqslant M$，在嵌入到原始图像之前，首先利用混沌密码序列将 W 进行加密。加密过程如下：将 W 表示成向量形式 $\boldsymbol{W}_p$，$p=1,2,\cdots,M\times M$，$\boldsymbol{W}_p$ 作为明文空间，利用 S_k 对水印图像进行加密，得到密文空间 $\boldsymbol{W}_v=\boldsymbol{W}_p\oplus S_k$，$v=1,2,\cdots,M\times M$。本书取$\oplus$执行异或运算。将混沌密钥 K 作为用户的私钥，在不知道 K 的情况下，盗版者即使提取出水印信号也无法恢复出水印图像。

2. 水印的嵌入与提取

设原始图像为 $X(i,j)(1\leqslant i,j\leqslant N)$，首先利用二维离散小波变换将 X 进行小波分解，得到不同空间、不同频率的子带图像。例如对 X 进行 4 级小波分解，X_m，$d(i,j)$表示位于分辨率为 m，方向为 d 的子带中(i,j)处的小波系数，$m=1,2,3,4$，d=LL，HL，LH，HH，分别表示低频子带和水平、垂直、对角方向的高频子带图像，图 7.22 表明了 Lena 图像的四级小波分解图，图 7.23 是其对应的小波分解树。

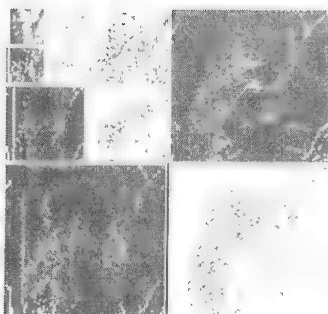


图 7.22 二维图像 4 级小波分解示意图

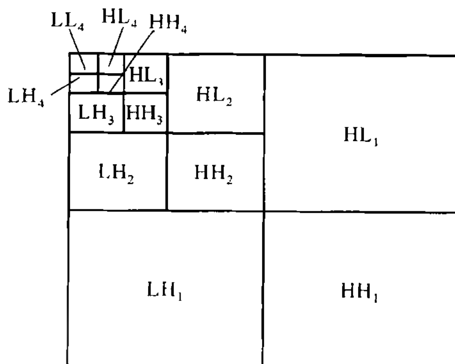


图 7.23 小波分解树

相应于图像的小波变换域，图像的纹理、边缘信息主要表现在 HH、HL 和 LH 细节子图中一些有较大值的小波系数上。因此可以考虑将水印嵌入到上述区域。从鲁棒性要求出

发，隐藏于高频部分的信息在有损压缩等量化操作后容易丢失，所以本书选择将水印嵌入到中频子带图像 HH_2、HL_2、LH_2、HH_3、HL_3 和 LH_3 中，为了保证水印的不可见性，算法设计了与水印嵌入位置特征参数相关的视觉掩蔽函数，使水印信号自适应于原始图像。

水印嵌入过程如下：

$$X'_{m,d}(i,j)=\begin{cases}X_{m,d}(i,j)+a_{m,d}(T_{m,d}(i,j)*w_v(i,j) & m=2,3;d=\mathrm{HH,HL,LH},I_{m,d}(i,j)\geqslant E_{m,d}\\ X_{m,d}(i,j) & \text{否则}\end{cases}$$

(7.4.8)

其中 $a_{m,d}$ 为第 m 级第 d 个子带图像的调节因子；$T_{m,d}(i,j)$ 是视觉掩蔽函数，表示第 m 级第 d 个子带图像 (i,j) 处的视觉掩蔽值；$E_{m,d}$ 表示第 m 级第 d 个子带图像的能量。分别作如下定义：

$$a_{m,d}=\begin{cases}\sqrt{2} & d=\mathrm{HH}\\ 1 & \text{否则}\end{cases}*\begin{cases}0.16 & m=2\\ 0.10 & m=3\end{cases}\tag{7.4.9}$$

$$T_{m,d}(i,j)=\frac{1}{N_{m,d}^2}(X_{m,d}(i,j)-e_{m,\mathrm{LL}})^2\tag{7.4.10}$$

其中 $N_{m,d}$ 指第 m 级第 d 子带的大小；$e_{m,\mathrm{LL}}$ 表示第 m 级的低频子带 LL 的均值。

$$E_{m,d}=\frac{1}{N_{m,d}^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X_{m,d}^2(i,j)\tag{7.4.11}$$

水印的提取采取有源提取。其过程与水印嵌入过程相反。假设提取出的信号为 W'_v，利用混沌密钥 K 进行解密，得到水印序列 $W'_p=W'_v\oplus k_t$，最后将 W'_p 转化成 2-D 的图像。

7.4.8 基于 DWT 的鲁棒-脆弱数字水印算法

目前对数字水印算法的研究，主要集中于鲁棒性数字水印方面。然而，随着多媒体在网上的大量传输，对媒体的完整性和可信性的证明变的越来越重要。完整和可信的含义是指信号的内容是经过鉴定的，并且在从源到目的的传输过程中，信息的内容没有发生改变。因此对脆弱性水印的研究正引起人们的极大关注。本节介绍一种基于图像特征的数字水印方法，该算法提取原始图像的边缘作为数字水印，自适应地嵌入到图像的小波域中。将提取出的水印与原始水印做相关运算可以证明图像的版权，将二者做比较运算可以证明图像内容的完整性。整个算法包括原始水印的产生、水印的嵌入和水印的提取三个部分。

1. 基于图像特征的原始水印的产生

图像的特征水印直接与图像的属性相关，可以被看作是图像的数字指纹。典型的图像特征有图像的边缘、颜色、梯度、照度或者它们的组合。其中图像的边缘表示了信号的突变点，携带了信号最重要的信息。因此，本算法选取图像的边缘特征作为水印信号。

小波变换在不同的尺度上具有“变焦”的功能，它是检测突变信号强有力的工具。在不同的尺度下，信号经过小波变换，能呈现不同的特征，信号的极大值能从一尺度传到另一尺度，且随着尺度的增加而增加，而噪声信号则相反。因此，利用小波多尺度法提取边缘，在大尺度下可以抑制噪声，可靠地识别边缘，在小尺度下可以精确地定位。本算法采用正交小波基对图像进行变换，提取边缘信息。

设 ψ 为基小波，设 $\theta(x,y)$ 是光滑函数，满足条件：

$$\theta(x,y)>0\ \text{和}\iint_{\mathbf{R}^2}\theta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\text{常数}\tag{7.4.12}$$

此时，$\psi^1(x,y)=\frac{\partial\theta(x,y)}{\partial x}$和$\psi^2(x,y)=\frac{\partial\theta(x,y)}{\partial y}$可作为小波函数。若 $f\in L^2(\mathbf{R}^2)$，设 $W_{2^j}^1 f(x,y)=f*\psi_{2^j}^1(x,y)$，$W_{2^j}^2 f(x,y)=f*\psi_{2^j}^2(x,y)$，则 $Wf=\{W_{2^j}^1 f(x,y),W_{2^j}^2 f(x,y)\}$ 是 $f(x,y)$ 的二维二进小波变换。

定义矢量：

$$\begin{vmatrix} W_{2^j}^1 f(x,y) \\ W_{2^j}^2 f(x,y) \end{vmatrix} = 2^j \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(f*\theta_2^1)(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y}(f*\theta_2^2)(x,y) \end{vmatrix} = 2^j\,\nabla(f*\theta_{2^j})(x,y) \tag{7.4.13}$$

固定尺度 2^j，梯度向量的模为

$$M_{2^j}^1 f(x,y)=\sqrt{|W_{2^j}^1 f(x,y)|^2+|W_{2^j}^2 f(x,y)|^2} \tag{7.4.14}$$

相角为

$$A_{2^j} f(x,y)=\arg\{W_{2^j}^1 f(x,y)+iW_{2^j}^2 f(x,y)\} \quad i\text{ 是虚数单位} \tag{7.4.15}$$

沿梯度方向，在阈值 H_t 的约束下检测模值的极大点，对应于图像灰度的剧变点，即为图像的边缘。

2. 数字水印的嵌入

水印的嵌入过程如图 7.24 所示。

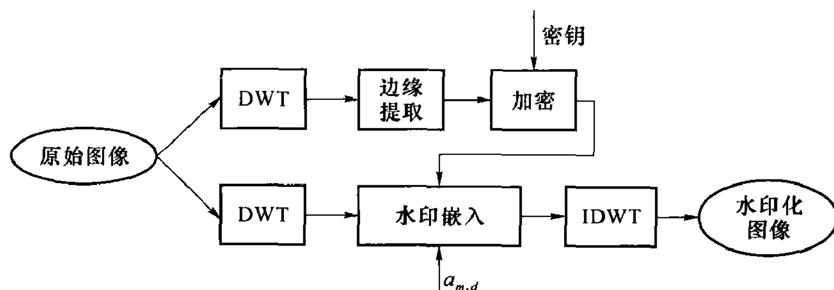


图 7.24　水印嵌入过程框图

水印嵌入过程在小波域进行。设原始图像为 $X(i,j)(1\leqslant i,j\leqslant N)$，首先利用二维离散小波变换将 X 进行小波分解，得到不同空间、不同频率的子带图像。对 X 进行 3 级小波分解，$X_{m,d}(i,j)$表示位于分辨率为 m，方向为 d 的子带中(i,j)处的小波系数，其中，$m=1,2,3$，$d=\mathrm{LL,HL,LH,HH}$。

将提取出的图像边缘特征作为水印，记为 W，为了增强水印的安全性，嵌入前首先利用序列密码对 W 进行加密，得到 W。该算法的实质是在原始图像的边缘特征点上再次叠加了边缘，因此水印嵌入对原始图像的视觉效果的影响很小。水印嵌入过程如下：

$$X_{m,d}(i,j)=X_{m,d}(i,j)+a_{m,d}*w'(i,j) \quad m=1,2,3;d=\mathrm{LL,HH,HL,LH} \tag{7.4.16}$$

定义调节因子如下：

$$a_{m,d}=\begin{cases}0.2 & d=\mathrm{LL}\\ 0.5 & d=\mathrm{HL,LH}\\ 0.8 & d=\mathrm{HH}\end{cases}\cdot\begin{cases}0.1 & m=3\\ 0.3 & m=2\\ 0.5 & m=1\end{cases} \tag{7.4.17}$$

在整个算法中，序列密码的初始值、小波变换的种类、边缘提取的方法以及阈值等都可以作为密钥的一部分，如果其中任何一个条件不具备，都无法提取出实际嵌入的水印。

3. 数字水印的提取

首先将水印化图像进行小波变换，然后提取图像的边缘，提取阈值取 $a_{m,d}H_t$。因为提取过程中并没有用到原始图像，因此该算法实现了水印的盲提取。然后将提取出的水印解密，得到 W^*。最后，通过对提取出的水印做处理，可以分别检测水印的存在性和判断被篡改的部位。操作过程如图 7.25 所示。

第一种处理方法。将提取出的水印与原始水印做相关运算，判断载体中是否含有嵌入的水印。相关系数 C_δ 用来衡量提取出的水印 W^* 和原始水印 W 之间的相关性。根据实际要求，预先设定一个阈值 C_t，如果 $C_\delta > C_t$，可以判定水印 W 存在于待检测图像中，否则不存在。该方法可以用于图像的版权保护。

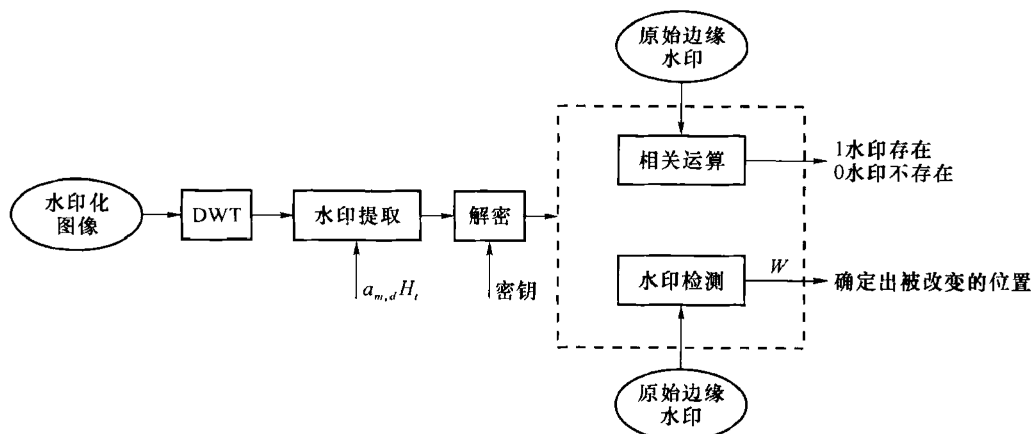


图 7.25　水印提取过程框图

第二种处理方法。将提取出的水印与原始水印进行比较，以此确定出图像改变的区域。例如，可以分别将提取出的数字水印和原始水印做归一化处理，然后将它们做异或运算，从而判断出被篡改的区域。该方法可以用于图像的内容完整性鉴定。

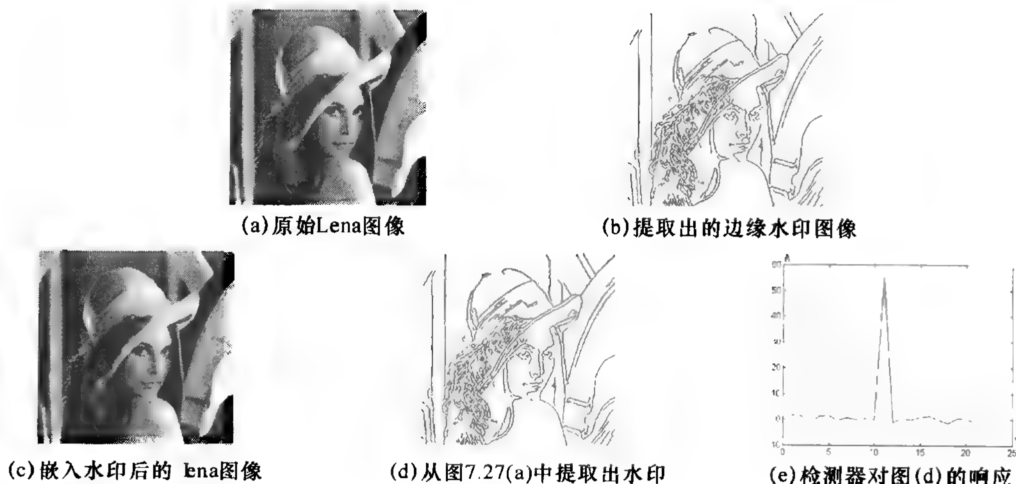


图 7.26　水印提取和检测实验图像

7.4.9 DWT 域直接序列扩频数字图像水印方法

扩频通信利用高速的扩频码将待传输的窄带数字信息扩展成宽带信息送入信道中传输，具有很强的抗干扰能力，此外，扩频通信还具有信息隐蔽和保密通信等优点。将扩展频谱技术应用于数字图像水印中，将高能量的窄带水印信号通过扩频嵌入到图像的不同频率分量或像素上，可较好地在数字水印不可见性和鲁棒性之间进行折中。同时，由于扩频码是一伪随机码，有很好的信息隐蔽和安全性，从而使嵌入的水印具有非常好的安全性。

扩频数字水印方法可在空间域实现，也可在变换域实现。空间域扩频图像水印方法利用图像像素实现扩频，将水印信息分布到图像不同像素中，可较好地利用图像的统计特性，但水印的嵌入容易在图像中产生类噪声干扰。相比之下，变换域扩频图像水印方法能较好地利用各种图像变换的特点，将水印能量分布到图像的所有像素上。同时，在水印编码过程中，可以方便地结合 HVS 的视觉掩蔽特性，这有利于保证数字水印的不可见性，能很好地折中水印鲁棒性和不可见性之间的矛盾。

本节将 DWT 与扩展频谱通信技术相结合，介绍一种 DWT 域直接序列扩频水印算法[45]。该方法具有不可逆性、强鲁棒性和安全性好等特点，可以实现水印盲提取，且对嵌入水印的小波系数没有零均值、与扩频序列同分布等要求。算法原理框图如图 7.27 所示。

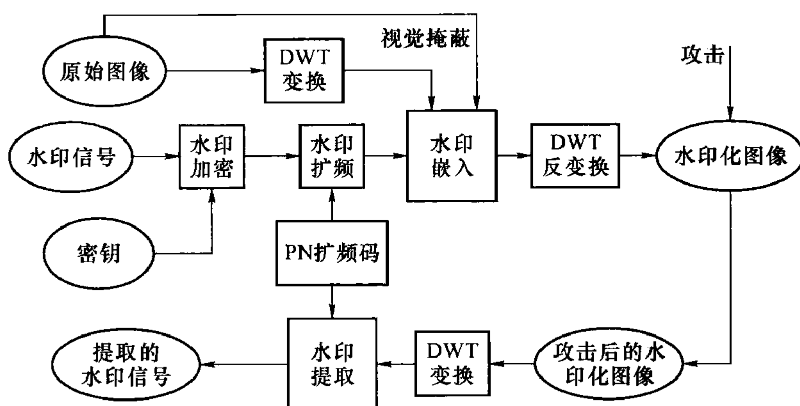


图 7.27　DWT 域直接序列扩频图像水印算法框图

1. 水印信号产生及扩频

设水印图像大小为 32×32 像素。为了增强水印安全性以及抗剪切的鲁棒性，在对水印扩频前，先使用图像置乱方法对二值水印图像进行加密，然后用直接序列扩频方法对加密后的水印图像进行扩频，具体过程如下：

将加密后水印图像表示成$\{W(i,j)\in(0,1),\ 0\leqslant i,j\leqslant 31\}$，对 $W(i,j)$从左至右逐行扫描，将其变换成一维序列，用$\hat{W}(k)\in(0,1),\ 0\leqslant k\leqslant 1\,023\}$表示。对 $\hat{W}(k)$的每一位（0 或 1）用两个长度为 8 的伪随机实数序列 $S_1(m)$和 $S_2(m)$进行扩频调制，如式(7.4.18)所示。

$$\begin{cases}\hat{W}_k(m)=S_1(m) & \hat{W}(k)=0\\ \hat{W}_k(m)=S_2(m) & \hat{W}(k)=1\end{cases},\quad m=0\sim 7 \tag{7.4.18}$$

式中，k 表示水印的第 k 位，且扩频序列 $S_1(m)$和 $S_2(m)$满足式(7.4.19)、式(7.4.20)的要

求，即 $S_1(m)$ 和 $S_2(m)$ 为均值为零、互不相关的伪随机序列。

$$\frac{1}{8}\sum_{m=0}^{7}S_1(m)=0,\quad \frac{1}{8}\sum_{m=0}^{7}S_2(m)=0 \tag{7.4.19}$$

$$\sum_{m=0}^{7}S_1(m)*S_2(m)=0 \tag{7.4.20}$$

经过扩频调制后，水印信号中的一位(0 或 1)分别被 $S_1(m)$ 和 $S_2(m)$ 代替，水印信号的长度由原来的 1 024(32×32)位扩展为 8 192(1 024×8)位的十进制随机数。

2. 水印嵌入

水印嵌入在 DWT 转换域进行。

设原始图像为 $I(i,j)$ $(1\leqslant i,j\leqslant N)$，首先利用二维离散小波变换对 I 进行小波分解，得到不同空间、不同频率的子带图像。本书利用紧支撑正交小波(db1)对图像进行 3 级小波分解(也可用其他小波对图像进行不同层次分解)，得到 10 个子带图像，分别用 LL_k，HL_k，LH_k，HH_k 表示($k=1,2,3$)。设分解后的子图像系数为 $X^{L,O}(u,v)$ $(1\leqslant u,\ v\leqslant N_k)$，上标 L 表示小波分解层次，与 k 一致，O 表示方向，不同的 O 值，分别表示 LL、HL、LH 和 HH 方向子图。如 $X^{1,2}(u,v)$ 表示 HL_1 子图小波变换系数。水印嵌入过程如下：

(1) 水印嵌入子图及系数选择

图 7.24 中，子图 HL_1、LH_1、HH_1 包含有图像 I 不同方向的高频成分(图像 I 的细节分量)，在这些子图中嵌入水印容易在通常的图像处理(如图像压缩等)中丢失，实验显示，在 HH_2 子图中嵌入水印容易在通常的图像滤波处理中被去掉。而 LL_3 子图包含有图像 I 的低频成分(近似分量)，在该子图嵌入水印容易破坏图像的视觉效果，为了更好地折中水印不可见性和鲁棒性，本书选择 HL_2、LH_2、HL_3、LH_3、HH_3 子图嵌入水印。

子带图像 HL_2、LH_2、HL_3、LH_3、HH_3 中较小的系数容易在图像压缩的量化过程中丢失，且这些系数可嵌入的水印能量较小，因此水印鲁棒性较差。这些子图中较大的系数含有图像 I 的主要成分，在通常的图像处理中都要加以保存，且可嵌入的水印能量较大。因此，为了提高水印鲁棒性，选择子带 HL_2、LH_2、HL_3、LH_3、HH_3 中绝对值最大的一些系数嵌入水印，具体嵌入水印系数选择过程如下：

首先对子图 HL_2、LH_2、HL_3、LH_3、HH_3 的小波系数按从小到大排序，排序结果可得到经排序的系数序列和系数位置变换序列，分别用 $\hat{Y}^{L,O}(m)$ 和 $P^{L,O}(m)$ 表示($0\leqslant m\leqslant N_k$)。

然后将序列 $\hat{Y}^{L,O}(m)$ 按 8 个数为一组分组，如式(7.4.21)所示，$\hat{Y}^{L,O}(k,m)$ 为一 $N_1\times 8$ 的矩阵。分别从子图 HL_2、LH_2 和 HL_3、LH_3、HH_3 中的系数矩阵 $\hat{Y}^{L,O}(k,m)$ 选择系数绝对值和 $Y_{\text{abs}}(k)$[如式(7.4.22)所示]较大的前 N_2 和 N_3 行嵌入水印，为了将所有水印位嵌入到图像中，$2N_2+3N_3$ 必须等于水印的总位数(1 024 位)，即 $2N_2+3N_3=1\,024$。

$$\begin{gathered}\hat{Y}^{L,O}(k,m)=\hat{Y}^{L,O}(8k+m)\\ m=0\sim 7,\ k=0\sim N_1\end{gathered} \tag{7.4.21}$$

$$Y_{\text{abs}}(k)=\left|\sum_{m=0}^{7}\hat{Y}^{L,O}(k,m)\right| \tag{7.4.22}$$

(2) 水印嵌入

设用于嵌入水印的系数用矩阵 $\boldsymbol{X}(k,\ m)$ $(k=0\sim 1\,023,\ m=0\sim 7)$表示，计算 $\boldsymbol{X}(k,\ m)$

每行的均值 $X_{\text{mean}}(k)$，如式(7.4.23)所示。然后按式(7.4.24)将水印嵌入到原始图像 I 中。式(7.4.24)中，$\overline{Z}_k(m)$ $(k=0\sim1\,023,\ m=0\sim7)$为嵌有水印的小波系数，$\alpha$ 为水印嵌入强度，用式(7.4.25)计算。β 根据 $X_{\text{mean}}(k)$所在子图确定，对应子图 HL_3、LH_3、HH_3，β 取为 8；对应子图 HL_2、LH_2，β 取为 4。当所有水印位被嵌入，用 $\overline{Z}_k(m)$代替 $\boldsymbol{X}(k,\ m)$，根据位置变换序列 $P^{L,O}(m)$将嵌有水印的小波系数 $\overline{Z}_k(m)$放回原来的位置，得到嵌有水印的小波子图系数，最后对子图系数进行小波反变换，得到嵌有水印的图像 $\tilde{\imath}(i,j)$。

$$X_{\text{mean}}(k)=\frac{1}{8}\sum_{m=0}^{7}\boldsymbol{X}(k,m),k=0\sim1\,023 \tag{7.4.23}$$

$$\begin{cases}\overline{Z}_k(m)=X_{\text{mean}}(k)+\alpha*S_1(m) & \hat{W}(k)=0\\ \overline{Z}_k(m)=X_{\text{mean}}(k)+\alpha*S_2(m) & \hat{W}(k)=1\end{cases} \tag{7.4.24}$$

$$\alpha=\frac{1}{\beta}X_{\text{mean}}(k) \tag{7.4.25}$$

3. 水印提取

在实际应用情况，水印图像 $\check{I}(i,j)$可能受到各种有意或无意攻击。设受攻击的嵌有水印的图像为 $I(i,j)$，将原始图像 $I(i,j)$和受攻击的嵌有水印的图像 $I(i,j)$分别进行 3 级小波变换，按照水印嵌入时的系数选择方法选择 $\check{I}(i,j)$中嵌有水印的小波系数(在不能得到原始图像情况下，利用水印嵌入时得到的位置变换序列 $P^{L,O}(m)$可确定水印化图像 $I(i,j)$中嵌有水印的小波系数)，用 $\overline{Z}^{S}(k,m)$ $(k=0\sim1\,023,\ m=0\sim7)$ 表示。然后，按照式(7.4.26)提取水印，用 $\hat{W}^{S}(k)$表示，对提取的水印 $\hat{W}^{S}(k)$进行解密，即可得到提取的二值水印图像 $\hat{W}^{S}(k)$。

$$\begin{cases}\hat{W}^{S}(k)=0, & \left|\sum\limits_{m=0}^{7}\overline{Z}^{S}(k,m)*S_1(m)\right|>\left|\sum\limits_{m=0}^{7}\overline{Z}^{S}(k,m)*S_2(m)\right|\\ \hat{W}^{S}(k)=1, & \left|\sum\limits_{m=0}^{7}\overline{Z}^{S}(k,m)*S_2(m)\right|>\left|\sum\limits_{m=0}^{7}\overline{Z}^{S}(k,m)*S_1(m)\right|\end{cases} \tag{7.4.26}$$

用于嵌入水印的小波系数绝对值越大，嵌入的水印鲁棒性越强；增加用于对水印信号进行扩频的伪随机序列的能量可提高水印鲁棒性。如增加扩频伪随机序列维数可增加序列能量，从而可提高水印鲁棒性，但嵌入水印的信息量会相应减少，可以说，基于扩频的水印方法特别适合于嵌入信息量较少的水印；当用于嵌入水印的小波系数在攻击中变化较小时，嵌入水印的鲁棒性越强。

参考文献

[1] 王大凯,彭进业.小波分析及其在信号处理中的应用.北京:电子工业出版社,2005.
[2] 杨福生.小波变换的工程分析与应用.北京:科学出版社,1999.
[3] 成礼智,王红霞,罗永.小波的理论与应用.北京:科学出版社,2004.
[4] 徐长发,李国宽.实用小波方法.武汉:华中科技大学出版社,2004.
[5] 周伟.MATLAB小波分析高级技术.西安:西安电子科技大学出版社,2006.
[6] 孙延奎.小波分析及其应用.北京:机械工业出版社,2005.
[7] 刘明才.小波分析及其应用.北京:清华大学出版社,2005.
[8] 魏明果.实用小波分析.北京:北京理工大学出版社,2005.
[9] 李弼程,罗建书.小波分析及其应用.北京:电子工业出版社,2005.
[10] 陈武凡.小波分析及其在图像处理中的应用.北京:科学出版社,2003.
[11] 李水根,吴纪桃.分形与小波.北京:科学出版社,2002.
[12] 胡茂林.空间和变换.北京:科学出版社,2007.
[13] 唐晓初.小波分析及其应用.重庆:重庆大学出版社,2006.
[14] 杨建国.小波分析及其工程应用.北京:机械工业出版社,2005.
[15] 张国华,张文娟,薛鹏翔.小波分析与应用基础.西安:西北工业大学出版社,2006.
[16] 程正兴.小波分析算法与应用.西安:西安交通大学出版社,1998.
[17] 李建平.小波分析信息传输基础.北京:国防工业出版社,2004.
[18] [法]Stphane Mallat.信号处理的小波导引.杨力华,戴道清,黄文良,等,译.北京:机械工业出版社,2002.
[19] [美]Dwight F. Mix, Kraig J. Olejniczak. 小波基础及应用教程.杨志华,杨力华,译.北京:机械工业出版社,2006.
[20] 彭玉华.小波变换与工程应用.北京:科学出版社,2005.
[21] 高志,余啸海.小波分析与应用.北京:国防工业出版社,2007.
[22] 刘涛,曾祥利,曾军.实用小波分析入门.北京:国防工业出版社,2006.
[23] 程正兴.小波分析与应用实例.西安:西安交通大学出版社,2006.
[24] 郑治真,沈萍,杨选辉等.小波变换及其MATLAB工具的应用.北京:地震出版社,2001.
[25] 葛哲学,沙威.小波分析理论与MATLAB2007实现.北京:电子工业出版社,2007.
[26] 唐向宏,李齐良.时频分析与小波变换.北京:科学出版社,2008.
[27] 陈基明.小波分析基础.上海:上海大学出版社,2002.
[28] 唐远炎,王玲.小波分析与文本文字识别.北京:科学出版社,2004.
[29] 成礼智,郭汉伟.小波与离散变换理论及工程实践.北京:清华大学出版社,2005.

[30] 谢成俊.小波分析理论及工程应用.长春:东北师范大学出版社,2007.

[31] I. Daubechies, Ten Lectures on wavelet, Capital city press, 1992.

[32] C. K. Chui and J. -L. Lian, A study of Orthonormal Multi-wavelets Applied Number,Math 20,273,1996.

[33] G. Strang. strela. V, short wavelets and matrix dilation equations. IEEE Tran SP. pp 484-496. 1996.

[34] Strela. V, Multiwavelets: theory and application. php Thesis. 1996.

[35] J. lebrun, M. Vetterl: Balanced Multiwavelets theory and design. IEEE Trans SP. pp 1119-1125. 1998.

[36] Q. T. Jiang, On the design of multifilter banks and orthonormal multiwavelets bass. IEEE Trans SP. pp 3292 3304. 1998.

[37] E. Koch and J. Zhao, Toward robust and hidden image copyright labeling, Proce. IEEE Workshop Nonlinear Signal and Image Processing, Neos Marmaras, Greece, June, pp 452-455,1995.

[38] A. G. Bors and I. Pitas, Image Watermarking Using DCT Domain Constraints, Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing, Vol. 3, Lausanne, Switzerland, Sept. 16-19, pp 231-234,1996.

[39] M. D. Swanson, B. Zhu, and A. H. Tewfik, Transparent Robust Image Watermarking, Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing, Vol. III:211-214,1996.

[40] M. Wu, B. Liu, Watermarking for Ima ge Authentication, IEEE International Conference on Image Processing ,Chicago, IL,USA, vol 2, pp 437-441, 1998.

[41] S. Burgett,E. Koch, and J. Zhao, Copyright Labelling of Digitized Image Data, IEEE Commun. Mag. , Vol. 36, Mar. , pp 94-1000,1998.

[42] I. J. Cox, J. Kilian, T. Leighton, and T. Shamoon, A secure, Robust Watermark for Multimedia, R. J. Anderson, Ed. , Information Hiding: First International Workshop, lecture Notes in Computer Science, Vol. 1174. Berlin, Germany: Springer-Verlag, pp 183-206,1996.

[43] C. I. Podilchuk and W. Zeng, Digital Image Watermarking Using Visual Models, Human Vision and Electronic Imaging II, Vol. 3016, B. E. Rogowitz and T. N. Pappas, Eds. San Jose, CA: IS & T and SPIE, pp 100-111,1997.

[44] Hsu, Chiou-Ting, Wu, Ja-Ling, Multiresolution Watermarking for Digital Images, IEEE Transations on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing V 45 N 8 Aug. 1998:1097-1101.

[45] Jiwu Huang and Yun Q. Shi, Adaptive Image Watermarking Scheme Based on Visual Masking, Electronics Letters, 16th April, pp 748-750,1998.

[46] 王慧琴.频率域图像数字水印技术的研究.西安:西安交通大学博士学位论文,2002.

[47] Ganzalez R C, Wintz P, Digital image processing, New York: Addison Wesley Publishing Co. , 1987.

[48] Kundui D, Hatzinakos D. Digital Watermarking for Tellete Tamper Proofing and Authentication, Proc, IEEE, 87(7), pp 1167-1087. 1999.

[49] Xia X, Boncelet C G, Arce G R. Wavelet Transform Based Watermark for digital images. Optics Express, 3(12), pp 497-511. 1998.

[50] Young-Sik Kim, O-Hyung Kwon, Rae-Hong Park, Wavelet Based Watermarking Method for Digital Images Using the Human Visual System, Electronics Letters, Vol. 35, No. 6, 18the March, pp 466-468. 1999.

[51] 梅时春.不可见鲁棒数字图像水印方法及反攻击对策的研究.西安:西安交通大学博士学位论文,2002.

[52] 纪越峰.现代通信技术.北京:北京邮电大学出版社,2002.

[53] Albert Boggess,Francis J. Narcowich.小波与傅里叶分析基础.芮国胜,康健,等,译.北京:电子工业出版社,2004.

[54] 赵凯,王宗花.小波变换及其在分析化学中的应用.北京:地质出版社,2000.

[55] 杨娜娟.基于支持向量机的视频火焰探测技术研究.西安:西安建筑科技大学硕士学位论文,2010.

[56] 历谨.图像型火灾探测技术的研究.西安:西安建筑科技大学硕士学位论文,2010.

[General Information]

□□=□□□□□□□

□□=□□□□□

□□=178

SS□=12749002

DX□=

□□□□=2011.01

□□□=□□□□□□□□□